La $\{-k\}$-autodualité des sommes lexicographiques finies de tournois suivant un 3-cycle ou un tournoi critique

October 29, 2004

Houcine Bouchaala[(a)] Youssef Boudabbous[(b)]

(a) Département de la préparation Mathématiques-Physique, Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Sfax, Université de Sfax, BP 805, 3000 Sfax, Tunisie. Tél: 00.216.74.24.14.03 E-mail: Houcine.Bouchaala@ipeis.rnu.tn

(b) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Sfax, Université de Sfax, BP 802, 3018 Sfax, Tunisie. Tél: 00.216.74.27.49.23
E-mail: Youssef_Boudabbous@Yahoo.fr

Abstract. Let $T = (V, A)$ be a finite tournament with $n \geq 2$ vertices. The dual of T is the tournament $T^* = (V, A^*)$ defined by: for all $x, y \in V$, $(x, y) \in A^*$ if and only if $(y, x) \in A$. The tournament T is critical if T is indecomposable and if for all $x \in V$, the subtournament $T(V - \{x\})$ is decomposable. A 3-cycle is a tournament isomorphic to the tournament $T_1 = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\})$. Let F be a set of non negative integers $k < n$. The tournament T is F-selfdual if for every subset X of V such that $| X | \in F$, the subtournaments $T(X)$ and $T^*(X)$ are isomorphic.

In this paper, we study, for each integer $k \geq 1$, the $\{n - k\}$-selfduality of the tournaments, with $n \geq 4 + k$ vertices, that are lexicographical sums of tournaments under a 3-cycle or a critical tournament. As application, we determine for each integer $k \geq 1$, the tournaments, with $n \geq 4 + k$ vertices, that are $\{4, n - k\}$-selfdual.

Mathematics Subject Classifications (1991): 05C20, 05C60.

Keywords: Tournois, tournois critiques, sommes lexicographiques, isomorphie et autodualité.

1 Préliminaires et présentation des résultats

1.1 Préliminaires

Un *tournoi fini* T est un couple (S, A), où S est un ensemble fini, appelé ensemble des *sommets* de T, et A est un ensemble de couples de sommets distincts de T, appelé ensemble des *arcs* de T, vérifiant: pour tous $x, y \in S$, avec $x \neq y$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. L'ordre de T est le cardinal de S. Par commodité, pour tous $x \neq y \in S$, $x \longrightarrow y$ signifie $(x, y) \in A$. Pour tout $x \in S$ et pour tout $Y \subseteq S$, $x \longrightarrow Y$ (resp. $Y \longrightarrow x$) signifie $x \longrightarrow y$ (resp. $y \longrightarrow x$) pour tout $y \in Y$.

Dans cet article, un tournoi désigne un tournoi fini et le cardinal d'un ensemble fini E sera noté par $|E|$.

Étant donnés deux tournois $T = (S, A)$ et $T' = (S', A')$, une bijection f de S sur S' est un *isomorphisme* de T sur T' si pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que T et T' sont *isomorphes* et on note $T \simeq T'$. Un *automorphisme* de T est un isomorphisme de T sur lui même.

Un tournoi $T = (S, A)$ est un *ordre total* lorsque pour tous $x, y, z \in S$, si $(x, y), (y, z) \in A$, alors $(x, z) \in A$. Dans ce cas, si $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (où $n \geq 2$) et si pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $(a_i, a_{i+1}) \in A$, alors on note $T = (a_1 < \ldots < a_n)$. Par exemple, l'ordre total usuel sur $\{1, \ldots, n\}$ (où $n \geq 2$) est $O_n = (1 < \ldots < n)$. Un *presque-ordre total* est un tournoi isomorphe au tournoi obtenu à partir d'un certain O_n (où $n \geq 3$) en remplaçant l'arc $(1, n)$ par l'arc $(n, 1)$. Un presque-ordre total à 3 sommets est un 3-*cycle*. On note T_1, le 3-cycle sur $\{0, 1, 2\}$ tel que $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 0$.

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, à chaque partie X de S est associé le *sous-tournoi* $T(X)$ de T *induit* par X défini par $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$. Par commodité, si $X \subseteq S$ (resp. $x \in S$), alors le sous-tournoi $T(S - X)$ (resp. $T(S - \{x\})$) est noté $T - X$ (resp. $T - x$). Pour tout $x \in S$, on dit que $T - x$ est le tournoi obtenu par la suppression du sommet x de T.

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, une partie X de S est un *intervalle* [7] (ou un *clan* [6] ou un ensemble *homogène* [9]) de T si pour tout $x \in S - X$, $x \longrightarrow X$ ou bien $X \longrightarrow x$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ où $x \in S$, et S sont des intervalles de T, appelés les intervalles *triviaux* de T. Un tournoi est *indécomposable* [7] (ou *primitif* [6]) si tous ses intervalles sont triviaux et il est *décomposable* dans le cas contraire. Un tournoi indécomposable T est *critique* [17], si pour tout sommet x de T, le tournoi $T - x$ est décomposable.

Afin de rappeler la caractérisation suivante des tournois critiques, due à J. H. Schmerl et W. T. Trotter [17], nous définissons, pour tout entier $h \geq 2$, les tournois T_h, U_h et V_h sur $\{0, \ldots, 2h\}$ comme suit.

- $T_h(\{0, \ldots, h\}) = (0 < \ldots < h)$, $T_h(\{h+1, \ldots, 2h\}) = (h+1 < \ldots < 2h)$ et pout tout $i \in \{0, \ldots, h-1\}$, $\{i+1, \ldots, h\} \longrightarrow i + h + 1 \longrightarrow \{0, \ldots, i\}$.

- $U_h(\{0,\ldots,h\}) = (0 < \ldots < h)$, $U_h(\{h+1,\ldots,2h\}) = (2h < \ldots < h+1)$ et pout tout $i \in \{0,\ldots,h-1\}$, $\{i+1,\ldots,h\} \to i+h+1 \to \{0,\ldots,i\}$.

- $V_h(\{0,\ldots,2h-1\}) = (0 < \ldots < 2h-1)$ et $\{1,3,\ldots,2h-1\} \to 2h \to \{0,2,\ldots,2h-2\}$.

Proposition 1 (J. H. Schmerl et W. T. Trotter [17]) *À l'isomorphisme près, les seuls tournois critiques à au moins* 5 *sommets sont les tournois T_h, U_h et V_h où $h \geq 2$.*

Étant donné un tournoi $H = (\{1,\ldots,n\}, A)$ (où $n \geq 1$), associons à chaque sommet i de H, un tournoi $R_i = (S_i, A_i)$ de telle sorte que les ensembles S_i soient mutuellement disjoints. La *somme lexicographique* des tournois R_i suivant H est le tournoi noté $H(R_1,\ldots,R_n)$ et défini sur la réunion des S_i comme suit: étant donnés $u \in S_i$ et $v \in S_j$, où $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, (u,v) est un arc de $H(R_1,\ldots,R_n)$ lorsque ou bien $i = j$ et $(u,v) \in A_i$ ou bien $i \neq j$ et $(i,j) \in A$. Nous dirons aussi que le tournoi $H(R_1,\ldots,R_n)$ est obtenu à partir du tournoi H en *dilatant* chaque sommet i de H, par le tournoi R_i. Dans le cas particulier où tous les tournois R_i sont isomorphes à un même tournoi τ, le tournoi $H(R_1,\ldots,R_n)$ est dit le *produit lexicographique* de H par τ. Par exemple, tout tournoi obtenu à partir du tournoi T_1 en dilatant l'un de ses sommets par un ordre total est un presque-ordre total.

Un tournoi T à au moins 2 sommets est $\{-1\}$*-monomorphe*, s'il existe un tournoi R tel que pour tout sommet x de T, $T - x \simeq R$. Par exemple, pour tout entier $h \geq 1$, on vérifie que le tournoi T_h, le produit lexicographique du tournoi T_h par un ordre total à au moins 2 sommets et le produit lexicographique du tournoi T_h par un tournoi $\{-1\}$-monomorphe à au moins 3 sommets, sont des tournois $\{-1\}$-monomorphes.

Un tournoi $T = (S, A)$ est *fortement connexe* si pour tous $x \neq y \in S$, ils existent $x_0,\ldots,x_n \in S$ (où $n \geq 1$) tels que $x_0 = x$, $x_n = y$ et pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, $x_i \to x_{i+1}$.

Rappelons la décomposition de T. Gallai [9] pour les tournois.

Proposition 2 (T. Gallai [9]) *Soit T un tournoi à au moins* 3 *sommets.*

(1) *Le tournoi T est fortement connexe si et seulement si T est une somme lexicographique de tournois suivant un tournoi indécomposable H à au moins* 3 *sommets. (Le tournoi H est unique à l'isomorphisme près, il est appelé le squelette de T).*

(2) *Le tournoi T est non fortement connexe si et seulement si T est une somme lexicographique de tournois suivant un ordre total à au moins* 2 *sommets.*

À tout tournoi $T = (S, A)$ est associé son tournoi *dual* $T^* = (S, A^*)$ défini par: pour tous $x \neq y \in S$, $(x,y) \in A^*$ si et seulement si $(y,x) \in A$. Le tournoi T est *autodual* s'il est isomorphe à son dual.

À l'isomorphisme près, ils existent deux tournois autoduaux à 4 sommets: l'ordre total et le presque-ordre total, et ils existent deux tournois non autoduaux à 4 sommets qui sont obtenus à partir d'un ordre total à 2 sommets, en dilatant l'un de ses sommets par un 3-cycle; ces deux tournois sont dits *diamants*.

Soient $T = (S, A)$ un tournoi à au moins 2 sommets et $\mathcal{F}$ une famille d'entiers non nuls tels que pour tout $k \in \mathcal{F}$, $|k|<|S|$. Le tournoi T est *$\mathcal{F}$-autodual* si pour tout $k \in \mathcal{F}$, si $k > 0$ (resp. $k < 0$), alors pour toute partie X de S telle que $|X|= k$ (resp. $|X|= -k$), le sous-tournoi $T(X)$ (resp. $T-X$) est autodual. Un tournoi T d'ordre $n \geq 2$ est *fortement autodual*, si T est autodual et est $\{1,\ldots,n-1\}$-autodual. Par exemple, tout ordre total et tout presque-ordre total, est un tournoi fortement autodual.

Rappelons maintenant, le résultat suivant qui découle d'un résultat dû à G. Lopez [12] sur *le problème de reconstruction au sens de R. Fraïssé* [8].

Proposition 3 *Étant donné un tournoi T à au moins 7 sommets, si T est $\{1,\ldots,6\}$-autodual, alors T est fortement autodual.*

Rappelons ensuite le résultat suivant qui découle d'un résultat fondamental de coloration en combinatoire, dû à M. Pouzet [15].

Proposition 4 *Soit T un tournoi d'ordre $n \geq 3$. Si T est $\{q\}$-autodual où $1 \leq q \leq n-1$, alors pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq min(q, n-q)$, T est $\{p\}$-autodual.*

Des propositions 3 et 4, on déduit que pour tout entier $k \geq 6$ et pour tout tournoi T à au moins $6+k$ sommets, T est $\{-k\}$-autodual si et seulement si T est fortement autodual.

1.2 Présentation des résultats

En 1976, K. B. Reid et C. Thomassen [16] ont caractérisé les tournois fortement autoduaux. Ceci a suggéré l'étude des tournois dont certains sous-tournois sont autoduaux. Par exemple, en 1995, Y. Boudabbous et A. Boussairi [2], ont étudié la $\{-3\}$-autodualité d'une certaine classe de tournois et en 2000, Y. Boudabbous, J. Dammak et P. Ille [3], ont caractérisé les tournois indécomposables dont tous les sous-tournois indécomposables sont autoduaux. Par ailleurs, il est clair que tout tournoi est $\{2,3\}$-autodual et que les tournois $\{4\}$-autoduaux, sont exactement les tournois sans diamants. Ces derniers tournois ont été caractérisés par C. Gnanvo et P. Ille [10] et par G. Lopez et C. Rauzy [13].

Proposition 5 (G. Gnanvo, P. Ille et G. Lopez, C. Rauzy [10, 13]) *Étant donné un tournoi T à au moins 5 sommets, T est sans diamants si et seulement si T est soit un ordre total, soit une somme lexicographique d'ordres totaux suivant un certain T_h où $h \geq 1$.*

En 1995, Y. Boudabbous et A. Boussairi [2] ont prouvé qu'un tournoi non fortement connexe T à au moins 5 sommets est $\{-1\}$-autodual si et seulement si T est un ordre total. Dans ce papier, nous commençons par établir la généralisation suivante de ce résultat.

Proposition 6 *Étant donnés un entier $k \geq 1$ et un tournoi non fortement connexe T à au moins $4+k$ sommets, T est $\{-k\}$-autodual si et seulement si T est un ordre total.*

Ensuite, nous étudions pour tout entier $k \geq 1$, la $\{-k\}$-autodualité des tournois fortement connexes T dont le squelette est soit un 3-cycle, soit un tournoi critique.

Dans un premier temps, nous traitons le cas où le squelette de T est un certain U_h ou V_h où $h \geq 2$. Dans ce cas, comme T a au moins 5 sommets, alors il est clair que pour tout entier $k \geq 2$, si T a au plus $3+k$ sommets, alors T est $\{-k\}$-autodual. Ainsi, nous étudions pour tout entier $k \geq 1$, la $\{-k\}$-autodualité de T en supposant que T a au moins $4+k$ sommets. Nous obtenons.

Théorème 1 *Étant donnés un entier $k \geq 1$ et un entier $h \geq 2$, il n'existe aucun tournoi fortement connexe à au moins $4+k$ sommets, qui est $\{-k\}$-autodual et dont le squelette est l'un des deux tournois U_h et V_h.*

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons au cas où le squelette de T est un certain T_h où $h \geq 1$. Dans ce cas, il est clair que si T a au plus 5 sommets, alors il est autodual. Il s'ensuit que pour tout entier $k \geq 1$, si T a au plus $5+k$ sommets, alors T est $\{-k\}$-autodual. Ainsi, nous étudions pour tout entier $k \geq 1$, la $\{-k\}$-autodualité de T en supposant que T a au moins $6+k$ sommets.

Pour la $\{-1\}$-autodualité, nous établissons le théorème suivant.

Théorème 2 *Soit T un tournoi fortement connexe à au moins 7 sommets, dont le squelette est un certain T_h où $h \geq 1$. Le tournoi T est $\{-1\}$-autodual si et seulement si l'une des huit situations suivantes est vérifiée.*

(*a*) *$h = 1$ et le tournoi T est un presque-ordre total.*

(*b*) *$h \geq 3$ et le tournoi T est isomorphe au tournoi T_h.*

(*c*) *$h \geq 2$ et le tournoi T est le produit lexicographique du tournoi T_h par un ordre total à 2 sommets.*

(*d*) *$h \geq 1$ et le tournoi T est le produit lexicographique du tournoi T_h par un tournoi τ à au moins 3 sommets tel que τ est autodual et $\{$-1$\}$-autodual.*

(*e*) *$h \geq 2$ et le tournoi T est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique du tournoi T_h par un ordre total à 2 sommets.*

(*f*) $h \geq 1$ *et le tournoi* T *est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique du tournoi* T_h *par un tournoi* τ *à au moins* 3 *sommets tel que* τ *est autodual,* {*-1, -2*}*-autodual et* $\{-1\}$*-monomorphe.*

(*g*) $h \geq 3$ *et le tournoi* T *est isomorphe au tournoi obtenu à partir du tournoi* T_h *en dilatant un de ses sommets par un ordre total à* 2 *sommets.*

(*h*) $h = 2$ *et le tournoi* T *est isomorphe au tournoi à* 8 *sommets, obtenu à partir du tournoi* T_2*, en dilatant chacun des sommets* 0, 2 *et* 3 *par un ordre total à* 2 *sommets.*

Pour la $\{-2\}$-autodualité, en nous basant sur le théorème 2, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 7 *Soit* T *un tournoi fortement connexe à au moins* 8 *sommets, dont le squelette est un certain* T_h *où* $h \geq 1$*. Le tournoi* T *est* $\{-2\}$*-autodual si et seulement si l'une des quatre situations suivantes est vérifiée.*

(*a*) $h = 1$ *et le tournoi* T *est un presque-ordre total.*

(*b*) $h \geq 4$ *et le tournoi* T *est isomorphe au tournoi* T_h*.*

(*c*) $h \geq 2$ *et le tournoi* T *est le produit lexicographique du tournoi* T_h *par un ordre total à* 2 *sommets.*

(*d*) $h \geq 1$ *et le tournoi* T *est le produit lexicographique du tournoi* T_h *par un tournoi* τ *à au moins* 3 *sommets tel que* τ *est autodual,* {*-1, -2*}*-autodual et* $\{-1\}$*-monomorphe.*

Pour la $\{-3\}$-autodualité, en utilisant le théorème 2 et la proposition 7, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 8 *Étant donné un tournoi fortement connexe* T *à au moins* 9 *sommets, dont le squelette est un certain* T_h *où* $h \geq 1$*, le tournoi* T *est* $\{-3\}$*-autodual si et seulement si* T *est un presque-ordre total.*

Du théorème 2 et des propositions 5, 7 et 8, découlent les corollaires 1, 2 et 3 suivants, qui déterminent pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, les tournois $\{4, -k\}$-autoduaux, à au moins $6 + k$ sommets.

Corollaire 1 *Étant donné un tournoi* T *à au moins* 7 *sommets,* T *est* $\{4, -1\}$*-autodual si et seulement si l'une des neuf situations suivantes est vérifiée.*

(*a*) *Le tournoi* T *est un ordre total.*

(*b*) *Le tournoi* T *est un presque-ordre total.*

(c) *Le tournoi T est isomorphe à un certain T_h où $h \geq 3$.*

(d) *Le tournoi T est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 2$, par un ordre total à 2 sommets.*

(e) *Le tournoi T est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 1$, par un ordre total à au moins 3 sommets.*

(f) *Le tournoi T est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 2$, par un ordre total à 2 sommets.*

(g) *Le tournoi T est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 1$, par un ordre total à au moins 3 sommets.*

(h) *Le tournoi T est isomorphe au tournoi obtenu à partir d'un certain T_h où $h \geq 3$, en dilatant un de ses sommets par un ordre total à 2 sommets.*

(i) *Le tournoi T est isomorphe au tournoi à 8 sommets, obtenu à partir du tournoi T_2, en dilatant chacun des sommets 0, 2 et 3 par un ordre total à 2 sommets.*

Corollaire 2 *Étant donné un tournoi T à au moins 8 sommets, T est $\{4, -2\}$-autodual si et seulement si l'une des cinq situations suivantes est vérifiée.*

(a) *Le tournoi T est un ordre total.*

(b) *Le tournoi T est un presque-ordre total.*

(c) *Le tournoi T est isomorphe à un certain T_h où $h \geq 4$.*

(d) *Le tournoi T est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 2$, par un ordre total à 2 sommets.*

(e) *Le tournoi T est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 1$, par un ordre total à au moins 3 sommets.*

Corollaire 3 *Étant donné un tournoi T à au moins 9 sommets, le tournoi T est $\{4, -3\}$-autodual si et seulement si T est soit un ordre total, soit un presque-ordre total.*

À l'aide des corollaires 2 et 3, on retrouve directement la caractérisation suivante des tournois fortement autoduaux due à K. B. Reid et C. Thomassen [16].

Corollaire 4 (K. B. Reid et C. Thomassen [16]) *Un tournoi T à au moins 8 sommets est fortement autodual si et seulement si T est soit un ordre total, soit un presque-ordre total.*

Des résultats précédents découle le corollaire 5 suivant, qui répond en particulier dans le cas des tournois, à la question posée par A. Boussairi [4] qui concerne la caractérisation *des graphes orientés* $\{-4\}$*-autoduaux.*

Corollaire 5 *Étant donnés un entier $k \geq 4$ et un tournoi T à au moins $6+k$ sommets, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*a*) *Le tournoi T est $\{-k\}$-autodual.*

(*b*) *Le tournoi T est $\{-4\}$-autodual.*

(*c*) *Le tournoi T est soit un ordre total, soit un presque-ordre total.*

Notons enfin que pour $k \in \{1,2,3\}$, la caractérisation des tournois $\{-k\}$-autoduaux, reste encore un problème ouvert. En particulier, pour $k = 3$, A. Boussairi [5] a donné la conjecture suivante.

Conjecture 1 (A. Boussairi [5]) *Tout tournoi $\{-3\}$-autodual d'ordre suffisamment grand est fortement autodual.*

En revanche, Y. Boudabbous et A. Boussairi [2] ont obtenu en 1995, la réponse partielle suivante à la conjecture 1.

Proposition 9 (Y. Boudabbous et A. Boussairi [2]) *Soient un entier $n \geq 12$ et C la classe des tournois à n sommets dont tous les sous-tournois à $(n-3)$ sommets sont décomposables. Pour tout $T \in C$, T est $\{-3\}$-autodual si et seulement si T est fortement autodual.*

2 Preuve de la propsition 6

Pour la preuve, nous donnons d'abord la remarque suivante.

Remarque 1 *Soit T un tournoi non fortement connexe qui n'est pas un ordre total. De la proposition 2, découle que $T = O_q(R_1, \ldots, R_q)$ où $q \geq 2$, $R_1, \ldots, R_q$ sont des tournois tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, q-1\}$, R_i et R_{i+1} ne sont pas simultanément des ordres totaux et pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, le tournoi R_i est soit un ordre total, soit fortement connexe. On vérifie alors que T est autodual si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, $R_i \simeq (R_{q+1-i})^\star$.*

La preuve de la proposition 6 utilise en outre les deux lemmes suivants, dont le premier découle d'un résultat dû à F. Harary et E. Palmer [11] sur *le problème de reconstruction au sens d'Ulam* [18].

Lemme 1 *Tout tournoi non fortement connexe et $\{-1\}$-autodual, à au moins 5 sommets, est autodual.*

Lemme 2 (J. W. Moon [14]) *Tout tournoi T fortement connexe à au moins 4 sommets admet au moins un sommet x tel que $T - x$ est un tournoi fortement connexe.*

Preuve de la proposition 6. La condition suffisante étant évidente, on va montrer la condition nécessaire en distinguant suivant la valeur de l'entier k, les 4 cas suivants.

• Cas 1. Si $k = 1$. (On donne ici une autre preuve que celle donnée dans [2]). Soit T un tournoi non fortement connexe $\{-1\}$-autodual à au moins 5 sommets. Raisonnons par l'absurde et supposons que T n'est pas un ordre total. D'aprés la remarque 1, $T = \mathcal{O}_q(R_1, \dots, R_q)$ où $q \geq 2$, $R_1, \dots, R_q$ sont des tournois tels que pour tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$, R_i et R_{i+1} ne sont pas simultanément des ordres totaux et pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, le tournoi R_i est soit un ordre total, soit fortement connexe. D'aprés le lemme 1, le tournoi T est autodual. De la remarque 1, découle alors que pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, $R_i \simeq (R_{q+1-i})^\star$ et en particulier, $R_1 \simeq (R_q)^\star$. Distinguons les 4 sous-cas suivants.

◇ Si R_1 est un tournoi fortement connexe à au moins 4 sommets. D'aprés le lemme 2, il existe un sommet x de R_1 tel que $R_1 - x$ est fortement connexe. Ainsi, $T - x = \mathcal{O}_q(R_1 - x, R_2, \dots, R_q)$. D'aprés la remarque 1, l'autodualité de $T - x$ entraîne alors que $(R_1 - x) \simeq (R_q)^\star$; ce qui contredit le fait que $R_1 \simeq (R_q)^\star$.

◇ Si R_1 est un 3-cycle. Soit x un sommet de R_1. En distinguant les deux cas suivant la forte-connexité de R_2, on peut voir que $T - x = \mathcal{O}_p(R'_1, \dots, R'_p)$ où $p \in \{q-1, q\}$, R'_1 est un ordre total et $R'_p = R_q$. D'aprés la remarque 1, l'autodualité de $T - x$ entraîne que $R'_1 \simeq (R_q)^\star$; ce qui contredit le fait que R_q est un 3-cycle, puisque $R_1 \simeq (R_q)^\star$.

◇ Si R_1 est un ordre total à au moins 2 sommets. Dans ce cas, en considérant un sommet x de R_1, on voit que $T - x = \mathcal{O}_q(R_1 - x, \dots, R_q)$. D'aprés la remarque 1, l'autodualité de $T - x$ entraîne que $(R_1 - x) \simeq (R_q)^\star$; ce qui contredit le fait que $R_1 \simeq (R_q)^\star$.

◇ Si R_1 admet un seul sommet x. Dans ce cas, R_q admet aussi un seul sommet y et R_2 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets. Ainsi, $T - x = \mathcal{O}_{q-1}(R_2, \dots, R_q)$. D'aprés la remarque 1, l'autodualité de $T - x$ entraîne que $R_2 \simeq (R_q)^\star$; ce qui est absurde.

• Cas 2. Si $k = 2$. Soit T un tournoi non fortement connexe $\{-2\}$-autodual à au moins 6 sommets. Si pour tout sommet x de T, le tournoi $T - x$ est non fortement connexe, alors d'aprés le cas 1, pour tout sommet x de T, le tournoi $T - x$ est un ordre total, et par suite, T est aussi un ordre total. Supposons donc qu'il existe un sommet x de T tel que $T - x$ est fortement connexe. D'aprés la remarque 1, $T = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ où R_1 et R_2 sont des tournois dont l'un admet x comme seul sommet et l'autre est fortement connexe à au moins 5 sommets. En utilisant le lemme 2, on peut voir qu'il existe un sommet y de T tel que $T - y$

est un tournoi non fortement connexe qui n'est pas un ordre total. D'aprés le cas 1, $T - y$ est donc non $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual.

- Cas 3. Si $k = 3$. On fait un raisonnement analogue à celui du cas 2, en utilisant ce dernier à la place du cas 1.

- Cas 4. Si $k \geq 4$. Soit T un tournoi non fortement connexe $\{-k\}$-autodual à au moins $4 + k$ sommets. D'aprés la proposition 4, T est $\{4\}$-autodual et par suite, T est sans diamants. Comme toute somme lexicographique de tournois suivant un certain T_h (où $h \geq 1$) est un tournoi fortement connexe, alors d'aprés la proposition 5, le tournoi T est un ordre total.

$\square$

3 Preuve du théorème 1

Considérons d'abord la remarque générale suivante.

Remarque 2 *Soient un entier $n \geq 3$ (resp. $n' \geq 3$) et un tournoi $T = H(p_1, \ldots, p_n)$ (resp. $T' = H'(p'_1, \ldots, p'_{n'})$), où H (resp. H') est un tournoi sur $\{1, \ldots, n\}$ (resp. $\{1, \ldots, n'\}$) et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ (resp. $i \in \{1, \ldots, n'\}$), p_i (resp. p'_i) est un tournoi sur un ensemble S_i (resp. S'_i). Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(a) *Si $n = n'$ et s'il existe un isomorphisme φ de H sur H' tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p_i \simeq p'_{\varphi(i)}$, alors $T \simeq T'$.*

(b) *Si T et T' sont isomorphes et si H ou H' est indécomposable, alors $n = n'$ et tout isomorphisme f de T sur T', induit un isomorphisme $\overline{f}$ de H sur H' tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(S_i) = S'_{\overline{f}(i)}$.*

La preuve du théorème 1, utilise en outre, les trois lemmes et la remarque qui suivent.

Lemme 3 *Pour tout entier $h \geq 2$, il existe un seul isomorphisme φ_h de U_h sur $(U_h)^*$. De plus, φ_h est involutif et admet un seul point fixe x_h et x_h est défini par:* $x_h = \begin{cases} \frac{h}{2} & \text{si } h \text{ est pair} \\ \frac{3h+1}{2} & \text{si } h \text{ est impair} \end{cases}$

Preuve. Il est clair que le seul isomorphisme $(\varphi_h)_1$ (resp. $(\varphi_h)_2$) de l'ordre total $U_h(\{0, \ldots, h\})$ (resp. $U_h(\{h+1, \ldots, 2h\})$ sur son dual, est défini par $(\varphi_h)_1(t) = h - t$ pour tout $t \in \{0, \ldots, h\}$ (resp. $(\varphi_h)_2(t) = 3h + 1 - t$ pour tout $t \in \{h+1, \ldots, 2h\}$). Soit φ_h la permutation de $\{0, \ldots, 2h\}$ définie par

$$\varphi_h(t) = \begin{cases} h-t & \text{si } t \in \{0,\ldots,h\} \\ 3h+1-t & \text{si } t \in \{h+1,\ldots,2h\} \end{cases}$$

On vérifie que φ_h est un isomorphisme de U_h sur $(U_h)^*$ vérifiant les propriétés de l'énoncé. Reste à montrer l'unicité d'un tel isomorphisme de U_h sur $(U_h)^*$. Pour cela, considérons la notation suivante.

Pour tout tournoi $T = (S, A)$, on note par $\mathcal{C}(T)$, l'ensemble des sommets x de T vérifiant: il existe une partie X de S telle que $T(X)$ est un 3-cycle et $T(X \cup \{x\})$ est un diamant. Remarquons que d'aprés le lemme 11 de [3], $\mathcal{C}(U_h) = \{h+1,\ldots,2h\}$.

Considérons maintenant un isomorphisme f de U_h sur $(U_h)^*$. On a $f(\mathcal{C}(U_h)) = \mathcal{C}((U_h)^*)$. Comme $\mathcal{C}(U_h) = \mathcal{C}((U_h)^*) = \{h+1,\ldots,2h\}$, alors $f(\{h+1,\ldots,2h\}) = \{h+1,\ldots,2h\}$ et il s'ensuit que $f(\{0,\ldots,h\}) = \{0,\ldots,h\}$. Ainsi, f induit un isomorphisme f_1 (resp. f_2) de $U_h(\{0,\ldots,h\})$ (resp. $U_h(\{h+1,\ldots,2h\})$) sur son dual. Il s'ensuit que $f_1 = (\varphi_h)_1$ et $f_2 = (\varphi_h)_2$ et par suite, $f = \varphi_h$.

□

Lemme 4 *Pour tout entier $h \geq 2$, il existe un seul isomorphisme ψ_h de V_h sur $(V_h)^*$. De plus, ψ_h est involutif et admet le sommet $y_h = 2h$ comme seul point fixe.*

Preuve. Il est clair que la permutation ψ_h de $\{0,\ldots,2h\}$ définie par: $\psi_h(2h) = 2h$ et pour tout $t \in \{0,\ldots,2h-1\}$, $\psi_h(t) = 2h-1-t$, est un isomorphisme involutif de V_h sur son dual, ayant le sommet $2h$ comme seul point fixe. Reste à montrer l'unicité d'un tel isomorphisme de V_h sur $(V_h)^*$. Pour cela, considérons un isomorphisme f de V_h sur $(V_h)^*$. Comme $2h$ est le seul élément de $\{0,\ldots,2h\}$ par lequel passent tous les 3-cycles de V_h et de $(V_h)^*$, alors $f(2h) = 2h$. Ainsi, f induit un isomorphisme de l'ordre total $V_h(\{0,\ldots,2h-1\})$ sur son dual. Il en découle que $f = \psi_h$.

□

De la remarque 2 et des lemmes 3 et 4, découle le lemme suivant.

Lemme 5 *Soit un tournoi $T = H(p_0,\ldots,p_{2h})$ où $h \geq 2$, $H = U_h$ (resp. $H = V_h$) et pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et soit φ_h (resp. ψ_h) le seul isomorphisme de U_h sur $(U_h)^*$ (resp. V_h sur $(V_h)^*$). Le tournoi T est autodual si et seulement si pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $p_i \simeq (p_{\varphi_h(i)})^*$ (resp. $p_i \simeq (p_{\psi_h(i)})^*$).*

Remarque 3 (1) *Pour le tournoi U_h (où $h \geq 2$), les assertions suivantes sont vérifiées.*

(*a*) *$U_2 - \{2,4\} \simeq T_1$ et pour $h \geq 3$, $U_h - \{h, 2h\} \simeq U_{h-1}$.*

(*b*) *$U_2 - \{0,3\} \simeq T_1$ et pour $h \geq 3$, $U_h - \{0, h+1\} \simeq U_{h-1}$.*

(*c*) *Pour $h \geq 2$, $U_h - \{h\} = O_2(R_1, R_2)$ où R_1 est le tournoi dont le seul sommet est $2h$ et R_2 est le tournoi fortement connexe $U_h - \{h, 2h\}$.*

(*d*) *Pour* $h \geq 2$*,* $U_h - \{0\} = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ *où* R_2 *est le tournoi dont le seul sommet est* $h+1$ *et* R_1 *est le tournoi fortement connexe* $U_h - \{0, h+1\}$.

(2) *Pour le tournoi* V_h *(où* $h \geq 2$*), les assertions suivantes sont vérifiées.*

(*a*) $V_2 - \{2,3\} \simeq T_1$ *et pour* $h \geq 3$*,* $V_h - \{2h-2, 2h-1\} \simeq V_{h-1}$.

(*b*) $V_2 - \{0,1\} \simeq T_1$ *et pour* $h \geq 3$*,* $V_h - \{0,1\} \simeq V_{h-1}$.

(*c*) *Pour* $h \geq 2$*,* $V_h - \{0\} = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ *où* R_1 *est le tournoi dont le seul sommet est* 1 *et* R_2 *est le tournoi fortement connexe* $V_h - \{0,1\}$.

(*d*) *Pour* $h \geq 2$*,* $V_h - \{2h-1\} = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ *où* R_2 *est le tournoi dont le seul sommet est* $2h-2$ *et* R_1 *est le tournoi fortement connexe* $V_h - \{2h-2, 2h-1\}$.

Preuve du théorème 1. Pour la preuve, soit un entier $k \geq 1$ et supposons par l'absurde qu'il existe un tournoi $\{-k\}$-autodual à au moins $4+k$ sommets $T = H(p_0, \ldots, p_{2h})$, où $h \geq 2$, $H \in \{U_h, V_h\}$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i. Suivant les valeurs de l'entier k, on distingue les quatre cas suivants.

• Cas 1. Si $k = 1$. Notons d'abord que de la remarque 3 découle que pour tout entier $h \geq 2$ et pour tout $H \in \{U_h, V_h\}$, il existe un sommet i de H tel que $H - i = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ où R_1 est un tournoi à un seul sommet et R_2 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets. D'aprés la remarque 1, $H - i$ est un tournoi non autodual et par suite, H est non $\{-1\}$-autodual. Il s'ensuit que T est décomposable. Notons aussi que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, si $|S_i| \geq 2$, alors pour tout $x \in S_i$, $T - x = H(p'_0, \ldots, p'_{2h})$ où pour tout $t \in \{0, \ldots, 2h\}$,

$$p'_t = \begin{cases} p_t & \text{si } t \neq i \\ p_i - x & \text{si } t = i \end{cases}$$

Soient ρ_h le seul isomorphisme de H sur H^* et z_h le seul point fixe de ρ_h (voir les lemmes 3 et 4). La preuve se fait en 4 étapes.

Étape 1. Pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{z_h\}$, si $|S_i| \geq 2$, alors $|S_{\rho_h(i)}| = |S_i| - 1$. En effet: soit $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{z_h\}$ tel que $|S_i| \geq 2$ et soit $x \in S_i$. D'aprés le lemme 5 et le fait que $\rho_h(i) \neq i$, l'autodualité de $T - x$ entraîne que $p_i - x \simeq (p_{\rho_h(i)})^*$. Il s'ensuit que $|S_{\rho_h(i)}| = |S_i| - 1$.

Étape 2. Pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{z_h\}$, $|S_i| \leq 2$.
En effet: raisonnons par l'absurde et soit $j \in \{0, \ldots, 2h\} - \{z_h\}$ tel que $|S_j| \geq 3$. D'aprés l'étape 1, $|S_{\rho_h(j)}| = |S_j| - 1$. Comme $|S_j| - 1 \geq 2$ et $\rho_h(j) \neq z_h$, alors d'aprés l'étape 1, $|S_{\rho_h(\rho_h(j))}| = |S_{\rho_h(j)}| - 1 = |S_j| - 2$. Comme ρ_h est involutif, alors $|S_j| = |S_j| - 2$; ce qui est absurde.

Étape 3. Le tournoi T admet exactement un seul intervalle non trivial. En effet: raisonnons par l'absurde et soient $j_1 \neq j_2 \in \{0, \ldots, 2h\}$ tels que $| S_{j_1} | \geq 2$, $| S_{j_2} | \geq 2$ et $j_1 \neq z_h$. D'aprés l'étape 2, $| S_{j_1} |= 2$ et par suite, d'aprés l'étape 1, $| S_{\rho_h(j_1)} |= 1$. Ainsi, $\rho_h(j_1) \neq j_2$. Soit $y \in S_{j_2}$. Comme $j_2 \notin \{j_1, \rho_h(j_1)\}$, alors l'autodualité de $T - y$ entraîne que $p_{j_1} \simeq (p_{\rho_h(j_1)})^*$. Ainsi, $|S_{j_1}|=|S_{\rho_h(j_1)}|$; ce qui est absurde.

Étape 4. Le tournoi T n'est pas $\{-1\}$-autodual.
En effet: on va montrer qu'il existe un sommet x de T tel que $T - x = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ où R_1 et R_2 sont deux tournois dont l'un a au plus 2 sommets et l'autre est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets (ce qui permet de conclure grâce à la remarque 1).

Pour cela, si $H = U_h$ (resp. $H = V_h$), alors on note: $\alpha_h = h$, $\alpha'_h = 2h$, $\beta_h = 0$ et $\beta'_h = h + 1$ (resp. $\alpha_h = 0$, $\alpha'_h = 1$, $\beta_h = 2h - 1$ et $\beta'_h = 2h - 2$). Remarquons que $z_h \notin \{\alpha_h, \alpha'_h, \beta_h, \beta'_h\}$ et distinguons les deux cas suivants.

◇ Si S_{α_h} est un singleton $\{x\}$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 3, $H - \alpha_h = \mathcal{O}_2(\xi_1, \xi_2)$ où ξ_1 est un tournoi dont le seul sommet est α'_h et ξ_2 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets. Il s'ensuit que $T - x = \mathcal{O}_2(p_{\alpha'_h}, R_2)$ où R_2 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets (R_2 est une somme lexicographique suivant ξ_2). Comme $\alpha'_h \neq z_h$, alors d'aprés l'étape 2, $p_{\alpha'_h}$ a au plus 2 sommets; ce qui permet de conclure.

◇ Si S_{α_h} n'est pas un singleton. Dans ce cas, d'aprés les étapes 2 et 3, $|S_{\alpha_h}|= 2$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{\alpha_h\}$, $|S_i|= 1$. D'aprés la remarque 3, $H - \beta_h = \mathcal{O}_2(\xi_1, \xi_2)$ où ξ_2 est un tournoi dont le seul sommet est β'_h et ξ_1 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets. En posant $S_{\beta_h} = \{x\}$, on en déduit que $T - x = \mathcal{O}_2(R_1, p_{\beta'_h})$ où R_1 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets (R_1 est une somme lexicographique suivant ξ_1). On conclut en remarquant que $|S_{\beta'_h}|= 1$.

• Cas 2. Si $k = 2$. Dans ce cas, nous distinguons les deux sous-cas suivants.

◇ Si le tournoi T est indécomposable, alors d'aprés la remarque 3, il existe un sommet x de T tel que $T - x = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ où R_1 est un tournoi à un seul sommet et R_2 est un tournoi fortement connexe à au moins 4 sommets. Ainsi, $T - x$ est un tournoi à au moins 5 sommets, non fortement connexe et $\{-1\}$-autodual, qui n'est pas un ordre total; ce qui contredit la proposition 6.

◇ Si le tournoi T est décomposable, alors pour $x \in S_i$ où $i \in \{0, \ldots, 2h\}$ et $|S_i|\geq 2$, le tournoi $T - x$ contredit le cas 1.

• Cas 3. Si $k = 3$. On fait un raisonnement analogue à celui du cas 2, en utilisant ce dernier à la place du cas 1.

• Cas 4. Si $k \geq 4$. Dans ce cas, d'aprés la proposition 4, le tournoi T est $\{4\}$-autodual. D'où, T est un tournoi sans diamants et par suite, le tournoi H est sans diamants; ce qui contredit le fait que $U_h(\{0, 1, h+1, 2h\})$ et $V_h(\{0, 1, 2h, 2\})$

sont deux diamants.

4 Preuve du théorème 2

Notations 1 *Dans toute la suite de ce papier, étant donné un tournoi* $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ *où* $h \geq 1$ *et pour tout* $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i *est un tournoi sur un ensemble* S_i, *on note* $\mathcal{Z}(T) = \{i \in \{0, \ldots, 2h\};\ |S_i| \geq 2\}$ *et pour tout entier naturel* k, *on note* $\mathcal{Z}_k(T) = \{i \in \{0, \ldots, 2h\};\ |S_i| = k\}$, $\mathcal{P}_k(T) = \{S_i;\ i \in \mathcal{Z}_k(T)\}$ *et* $n_k(T) = |\mathcal{Z}_k(T)|$. *Si de plus* T *est* $\{-1\}$*-autodual, alors pour tout sommet* x *de* T, *on désigne par* f_x, *un isomorphisme du tournoi* $T - x$ *sur son dual.*

Pour tout entier $h \geq 1$, *l'ensemble des permutations circulaires sur* $\{0, \ldots, 2h\}$ *sera noté* Ω_h, *et l'application identique de* $\{0, \ldots, 2h\}$ *sera notée* π_0.

4.1 L'autodualité d'un tournoi fortement connexe dont le squelette est un certain T_h où $h \geq 1$

Dans cette partie, nous donnons quelques résultats sur l'autodualité d'un tournoi fortement connexe dont le squelette est un certain T_h (où $h \geq 1$), qui seront utiles pour la preuve du théorème 2.

Rappelons d'abord le lemme suivant.

Lemme 6 (C. Gnanvo et P. Ille [10]) *Pour tout entier* $h \geq 1$, *l'ensemble des automorphismes du tournoi* T_h *est égal à* Ω_h.

Établissons maintenant le lemme suivant.

Lemme 7 *Soit un entier* $h \geq 1$. *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(1) *Soit* θ_0 *la permutation de* $\{0, \ldots, 2h\}$ *définie par: pour tout* $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $\theta_0(i) = -i$ *modulo* $2h + 1$.

   (a) *La permutation* θ_0 *est un isomorphisme involutif du tournoi* T_h *sur son dual ayant le sommet* 0 *comme seul point fixe.*

   (b) *L'ensemble des isomorphismes du tournoi* T_h *sur son dual est égal à* $\{\theta_0\ o\ \pi;\ \pi \in \Omega_h\}$.

(2) *Soient* $i_1 \neq i_2 \in \{0, \ldots, 2h\}$ *et* i_0 *l'entier de* $\{0, \ldots, 2h\}$ *défini par:*

$$i_0 = \begin{cases} \frac{i_1+i_2}{2} & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est pair} \\ \frac{i_1+i_2+1}{2} + h & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } i_1 + i_2 \leq 2h - 1 \\ \frac{i_1+i_2-1}{2} - h & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } 2h + 1 \leq i_1 + i_2 \end{cases}$$

Soit $\Phi_{(i_1,i_2)}$ *la permutation de* $\{0, \ldots, 2h\}$ *définie par: pour tout* $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $\Phi_{(i_1,i_2)}(i) = i_1 + i_2 - i$ *modulo* $2h + 1$.

(a) *La permutation $\Phi_{(i_1,i_2)}$ est involutive et est le seul isomorphisme f du tournoi T_h sur son dual vérifiant $f(i_1) = i_2$.*

(b) *L'entier i_0 est le seul point fixe de $\Phi_{(i_1,i_2)}$.*

Preuve. (1) (a) Conséquence directe de la morphologie du tournoi T_h.

(b) Découle de (a) et du lemme 6.

(2) (a) Notons d'abord que la permutation $\Phi_{(i_1,i_2)}$ est clairement involutive. Remarquons ensuite que $\Phi_{(i_1,i_2)} = \theta_0 \circ \pi$ où π est l'élément de Ω_h défini par: pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $\pi(i) = i-(i_1+i_2)$ modulo $2h+1$. Ainsi, d'aprés (1)(b), $\Phi_{(i_1,i_2)}$ est un isomorphisme du tournoi T_h sur son dual vérifiant $\Phi_{(i_1,i_2)}(i_1) = i_2$. Inversement, si f est un isomorphisme du tournoi T_h sur son dual vérifiant $f(i_1) = i_2$, alors d'aprés (1)(b), il existe une permutation $\pi' \in \Omega_h$ telle que $f = \theta_0 \circ \pi'$. D'où, $\pi'(i_1) = -i_2$ modulo $2h+1$ et par suite, $\pi'(i_1) = \pi(i_1)$. Ainsi, $\pi' = \pi$ et $f = \Phi_{(i_1,i_2)}$.

(b) Remarquons d'abord que:

$$i_0 = \begin{cases} i_1 + i_2 - i_0 & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est pair} \\ i_1 + i_2 - i_0 + (2h+1) & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } i_1 + i_2 \leq 2h - 1 \\ i_1 + i_2 - i_0 - (2h+1) & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } 2h + 1 \leq i_1 + i_2 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\Phi_{(i_1,i_2)}(i_0) = i_0$. Ensuite, supposons par l'absurde qu'ils existent $t_1 \neq t_2 \in \{0,\ldots,2h\}$ tels que $\Phi_{(i_1,i_2)}(t_1) = t_1$ et $\Phi_{(i_1,i_2)}(t_2) = t_2$. On peut supposer que dans T_h, $t_1 \to t_2$. D'où, dans $(T_h)^*$, $\Phi_{(i_1,i_2)}(t_1) \to \Phi_{(i_1,i_2)}(t_2)$ et par suite, dans $(T_h)^*$, $t_1 \to t_2$; ce qui est absurde.

□

Du lemme 7 et de la remarque 2 découle le corollaire suivant.

Corollaire 6 *Soient un entier $h \geq 1$, $i_1 \neq i_2 \in \{0,\ldots,2h\}$ et un tournoi $T = T_h(p_0,\ldots,p_{2h})$ où pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i. Si T est autodual et si f est un isomorphisme de T sur T^* tel que $f(S_{i_1}) = S_{i_2}$, alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

(1) (a) *Pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $f(S_i) = S_{i_1+i_2-i}$ où l'entier $i_1 + i_2 - i$ est considéré modulo $2h+1$.*

(b) *Pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $(f \circ f)(S_i) = S_i$.*

(2) *Soit i_0 l'entier de $\{0,\ldots,2h\}$ défini par:*

$$i_0 = \begin{cases} \frac{i_1+i_2}{2} & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est pair} \\ \frac{i_1+i_2+1}{2} + h & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } i_1 + i_2 \leq 2h - 1 \\ \frac{i_1+i_2-1}{2} - h & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } 2h + 1 \leq i_1 + i_2 \end{cases}$$

L'entier i_0 est le seul élément j de $\{0,\ldots,2h\}$ vérifiant $f(S_j) = S_j$.

Nous obtenons maintenant, le corollaire suivant qui caractérise l'autodualité d'un tournoi fortement connexe dont le squelette est un certain T_h où $h \geq 1$.

Corollaire 7 *Soit un tournoi $T = T_h(p_0, \dots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i. Le tournoi T est autodual si et seulement s'il existe $i_0 \in \{0, \dots, 2h\}$ tel que pour tout $j \in \{0, \dots, h\}$, $p_{i_0+j} \simeq (p_{i_0-j})^*$ où $i_0 + j$ et $i_0 - j$ sont considérés modulo $2h + 1$. Lorsqu'un tel i_0 existe, on dit que T est symétrique par rapport à S_{i_0}.*

Preuve. La condition nécessaire découle du corollaire 6.
Pour la condition suffisante, il suffit de remarquer que pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, $p_i \simeq (p_{2i_0-i})^*$ où $2i_0 - i$ est considéré modulo $2h+1$, puis d'utiliser l'application $\Phi_{(i_0,i_0)}$ donnée par le lemme 7 et d'appliquer la remarque 2.
□

Des deux corollaires 6 et 7, découle la remarque suivante.

Remarque 4 *Soit un tournoi $T = T_h(p_0, \dots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et soit $j \in \{0, \dots, 2h\}$. Le tournoi T est symétrique par rapport à S_j si et seulement s'il existe un isomorphisme f de T sur T^* tel que $f(S_j) = S_j$.*

De la proposition 5 et du corollaire 7 découle la remarque suivante qui caractérise les tournois sans diamants autoduaux et qui ne sont pas des ordres totaux.

Remarque 5 *Soit un tournoi sans diamants $T = T_h(p_0, \dots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, p_i est un ordre total sur un ensemble S_i. Le tournoi T est autodual si et seulement s'il existe $i_0 \in \{0, \dots, 2h\}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, h\}$, $|S_{i_0-j}| = |S_{i_0+j}|$ où $i_0 - j$ et $i_0 + j$ sont considérés modulo $2h + 1$.*

À la fin de cette partie, nous donnons le lemme suivant qui découle directement du corollaire 7.

Lemme 8 *Soit un tournoi $T = T_h(p_0, \dots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i. Si T est autodual, alors il est symétrique par rapport à un certain S_{i_0} où $i_0 \in \{0, \dots, 2h\}$, et l'entier $|S_{i_0}|$ est le seul parmi les entiers naturels k tels que l'entier $n_k(T)$ soit impair.*

4.2 Preuve du théorème 2

Notons d'abord que de la morphologie du tournoi T_h (où $h \geq 1$), découle la remarque suivante.

Remarque 6 *Soit un tournoi $T = T_h(p_0, \dots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et soient $k \in \{0, \dots, 2h\}$ et $x \in S_k$.*

(a) *Si* $|S_k| \geq 2$*, alors* $T - x = T_h(p'_0, \ldots, p'_{2h})$ *où*

$$p'_j = \begin{cases} p_j & \text{si } j \neq k \\ p_k - x & \text{si } j = k \end{cases}$$

(b) *Si* $|S_k| = 1$ *et si* $h \geq 2$*, alors* $T - x = T_{h-1}(p'_0, \ldots, p'_{2h-2})$ *où*

$$p'_j = \begin{cases} T(S_{h+k} \cup S_{h+k+1}) & \text{si } j = 0 \\ p_{h+k+j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq h-1 \\ p_{h+k+j+2} & \text{si } h \leq j \leq 2h-2 \end{cases}$$

(les indices sont considérés modulo $2h+1$*)*

(c) *Si* $|S_k| = 1$ *et si* $h = 1$*, alors* $T - x = \mathcal{O}_2(p_{k+1}, p_{k+2})$ *où* $k+1$ *et* $k+2$ *sont considérés modulo* 3.

Notons maintenant que si un tournoi T vérifie l'une des situations citées dans le théorème 2, alors, en utilisant le corollaire 7 et la remarque 6, on peut voir que T est $\{-1\}$-autodual.

Ainsi, pour la preuve du théorème 2, on considère un tournoi $\{-1\}$-autodual à $n \geq 7$ sommets: $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et on pose $m = \max(\{|S_i|; i \in \{0, \ldots, 2h\}\})$. Si $m = 1$, alors le tournoi T se trouve dans la situation (b) du théorème 2. Dans la suite, on suppose donc que $m \geq 2$. En discutant suivant les valeurs de m et de h, la preuve du théorème 2 est donnée par les trois propositions suivantes.

Proposition 10 *Si* $h = 1$*, alors* $m \geq 3$ *et le tournoi* T *vérifie l'une des trois situations suivantes.*

(a) *Le tournoi* T *est un presque-ordre total.*

(b) *Le tournoi* T *est le produit lexicographique du tournoi* T_1 *par un tournoi* τ *à* m *sommets tel que* τ *est autodual et {-1}-autodual.*

(c) *Le tournoi* T *est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique du tournoi* T_1 *par un tournoi* τ *à* m *sommets tel que* τ *est autodual, {-1, -2}-autodual et* $\{-1\}$*-monomorphe.*

Proposition 11 *Si* $h \geq 2$ *et si* $m \geq 3$*, alors le tournoi* T *vérifie l'une des deux situations suivantes.*

(a) *Le tournoi* T *est le produit lexicographique du tournoi* T_h *par un tournoi* τ *à* m *sommets tel que* τ *est autodual et {-1}-autodual.*

(b) *Le tournoi* T *est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique du tournoi* T_h *par un tournoi* τ *à* m *sommets tel que* τ *est autodual, {-1, -2}-autodual et* $\{-1\}$*-monomorphe.*

Proposition 12 *Si* $h \geq 2$ *et si* $m = 2$*, alors le tournoi* T *vérifie l'une des quatre situations suivantes.*

(*a*) *Le tournoi T est le produit lexicographique du tournoi T_h par un ordre total à 2 sommets.*

(*b*) *Le tournoi T est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique du tournoi T_h par un ordre total à 2 sommets.*

(*c*) *$h \geq 3$ et le tournoi T est isomorphe au tournoi obtenu à partir du tournoi T_h en dilatant un de ses sommets par un ordre total à 2 sommets.*

(*d*) *$h = 2$ et le tournoi T est isomorphe au tournoi à 8 sommets, obtenu à partir du tournoi T_2, en dilatant chacun des sommets 0, 2 et 3 par un ordre total à 2 sommets.*

Pour la preuve de ces propositions, rappelons d'abord le lemme 9 (resp. lemme 10) suivant, qui découle d'un résultat sur *le problème de reconstruction au sens d'Ulam* [18], dû à M. Basso-Gerbelli et P. Ille [1] (resp. C. Gnanvo et P. Ille [10]).

Lemme 9 *Soient un entier $p \geq 3$ et un tournoi $R = H(R_1, \ldots, R_p)$ où H est un tournoi indécomposable sur $\{1, \ldots, p\}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, R_i est un tournoi sur un ensemble ξ_i. Si le tournoi R est $\{-1\}$-autodual et s'ils existent $i_1 \neq i_2 \in \{1, \ldots, p\}$ tels que $\min(|\xi_{i_1}|, |\xi_{i_2}|) \geq 2$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, le tournoi R_i est autodual.*

Lemme 10 *Étant donné un tournoi R sans diamants, à au moins 7 sommets, si R est $\{-1\}$-autodual, alors R est autodual.*

Dans un premier temps, nous établissons les deux lemmes suivants.

Lemme 11 *Si $|\mathcal{Z}(T)| = 1$ et si $m \geq 3$, alors T est un presque-ordre total.*

Preuve. Supposons que $|\mathcal{Z}(T)| = 1$ et que $m \geq 3$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\mathcal{Z}(T) = \{0\}$. Il s'ensuit que $|S_0| = m$ et que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $|S_i| = 1$. Posons $S_1 = \{a\}$ et $S_2 = \{b\}$. Il s'agit de montrer que $h = 1$ et que p_0 est un ordre total. Supposons par l'absurde que $h \geq 2$. D'aprés la remarque 6, le tournoi $T - a$ est isomorphe au tournoi, obtenu à partir du tournoi T_{h-1}, en dilatant le sommet 0 par p_0 et le sommet h par un ordre total à 2 sommets. Comme $m \geq 3$, alors $n_m(T - a) = n_m(T) = 1$ et $n_2(T - a) = 1$ et par suite, d'aprés le lemme 8, $T - a$ est donc non autodual; ce qui contredit la $\{-1\}$-autodualité de T. Ainsi, $h = 1$. Comme pour tout $x \in S_0$, $T - x$ est autodual, alors d'aprés le corollaire 7, p_0 est $\{-1\}$-autodual. Si p_0 est fortement connexe, alors d'aprés la remarque 1, le tournoi $T - a$ est non autodual (car $T - a = O_2(p_2, p_0)$); ce qui contredit la $\{-1\}$-autodualité de T. Ainsi, p_0 est un tournoi non fortement connexe $\{-1\}$-autodual à au moins 5 sommets et donc d'aprés la proposition 6, p_0 est un ordre total. Ainsi, T est un presque-ordre total.

□

Lemme 12 *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(1) *Pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, le tournoi p_i est autodual.*

(2) *S'ils existent $j \in \mathcal{Z}(T)$ et $x \in S_j$ tels que $f_x(S_j - \{x\}) = S_j - \{x\}$, alors le tournoi T est symétrique par rapport à S_j.*

(3) *S'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $n_k(T) \neq 0$ et $n_{k-1}(T) = 0$, alors pour tout $j \in \mathcal{Z}_k(T)$, le tournoi p_j est $\{-1\}$-autodual et le tournoi T est symétrique par rapport à S_j.*

Preuve. (1) Si $m \leq 3$, le résultat est trivial et si $m \geq 4$, on conclut par les lemmes 9 et 11.

(2) Étant donnés $j \in \mathcal{Z}(T)$ et $x \in S_j$ tels que $f_x(S_j - \{x\}) = S_j - \{x\}$, en considérant un isomorphisme φ_j de p_j sur son dual, on peut voir que l'application g définie sur $S = \bigcup_{0 \leq i \leq 2h} S_i$ par $g(y) = \begin{cases} f_x(y) & \text{si } y \notin S_j \\ \varphi_j(y) & \text{si } y \in S_j \end{cases}$ est un isomorphisme de T sur T^* tel que $g(S_j) = S_j$. La remarque 4 permet alors de conclure.

(3) Étant donné un entier $k \geq 2$ tel que $n_k(T) \neq 0$ et $n_{k-1}(T) = 0$, alors pour tout $j \in \mathcal{Z}_k(T)$ et pour tout $x \in S_j$, $S_j - x$ est le seul intervalle maximal de cardinal $k - 1$ de $T - x$ et de $T^* - x$ et par suite, $f_x(S_j - \{x\}) = S_j - \{x\}$ et on conclut par l'assertion (2).

□

Dans un deuxième temps, nous donnons la définition suivante, inspirée d'une notion donnée par C. Gnanvo et P. Ille [10], puis nous établissons les deux lemmes qui la suivent.

Définition 1 *On dit qu'un entier naturel non nul k est régulièrement réparti dans T, si $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$ et s'il existe un élément π de $\Omega_h - \{\pi_0\}$ tel que $\pi(\mathcal{Z}_k(T)) \subseteq \mathcal{Z}_k(T)$. L'orbite, par rapport à un tel π, d'un certain $i \in \{0, \ldots, 2h\}$ est dite un π-polygone de répartition.*

Lemme 13 *S'ils existent $i_1 \neq i_2 \in \mathcal{Z}(T)$, alors tout entier k tel que $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$ et $k \notin \{|S_{i_1}|, |S_{i_2}|, |S_{i_1}| -1, |S_{i_2}| -1\}$, est régulièrement réparti dans T.*

Preuve. Soient $x \in S_{i_1}$ (resp. $y \in S_{i_2}$) et $\overline{f_x}$ (resp. $\overline{f_y}$) l'isomorphisme du tournoi T_h sur son dual induit par f_x (resp. f_y) (voir la remarque 2). Il est clair que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $f_x(S_i - \{x\}) = S_{\overline{f_x}(i)} - \{x\}$ et $f_y(S_i - \{y\}) = S_{\overline{f_y}(i)} - \{y\}$. Posons $\pi = (\overline{f_y})^{-1} \circ \overline{f_x}$ et montrons d'abord que $\pi \in \Omega_h - \{\pi_0\}$. Il est clair que π est un automorphisme de T_h et par suite d'aprés le lemme 6, $\pi \in \Omega_h$. Il reste à prouver que $\pi \neq \pi_0$. Pour cela, supposons par l'absurde que $\overline{f_x} = \overline{f_y}$. On a donc $f_y(S_{i_1}) = f_y(S_{i_1} - \{y\}) = S_{\overline{f_x}(i_1)} - \{y\}$. D'où, $| S_{i_1} | = | S_{\overline{f_x}(i_1)} - \{y\} |$ et par suite $| S_{\overline{f_x}(i_1)} | \in \{| S_{i_1} |, | S_{i_1} | +1\}$. Or, $f_x(S_{i_1} - \{x\}) = S_{\overline{f_x}(i_1)} - \{x\}$, donc $|S_{i_1}| -1 = |S_{\overline{f_x}(i_1)} - x|$ et par suite $|S_{\overline{f_x}(i_1)}| \in \{| S_{i_1} |, | S_{i_1} | -1\}$. Il s'ensuit que, $| S_{\overline{f_x}(i_1)} | = | S_{i_1} |$ et que $x \in S_{\overline{f_x}(i_1)}$. Or $x \in S_{i_1}$, donc $\overline{f_x}(i_1) = i_1$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient aussi $\overline{f_y}(i_2) = i_2$. Comme $\overline{f_x} = \overline{f_y}$, alors $\overline{f_x}$ est un isomorphisme de T_h sur son dual qui admet au moins deux points fixes distincts; ce qui contredit le lemme 7. Ainsi, $\pi \in \Omega_h - \{\pi_0\}$.

Supposons maintenant qu'il existe un entier non nul k tel que $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$ et $k \notin \{|S_{i_1}|, |S_{i_2}|, |S_{i_1}| -1, |S_{i_2}| -1\}$ et soit $i \in \mathcal{Z}_k(T)$. On a $|f_x(S_i - \{x\})| = | f_x(S_i) |=| S_i |= k$ (car $k \neq | S_{i_1} |$). Or, $f_x(S_i - \{x\}) = S_{\overline{f_x}(i)} - \{x\}$, donc $| S_{\overline{f_x}(i)} - \{x\} |= k$. Si $x \in S_{\overline{f_x}(i)}$, alors $\overline{f_x}(i) = i_1$ et $| S_{\overline{f_x}(i)} |= k + 1$ et par suite $|S_{i_1}|= k + 1$; ce qui contredit le fait que $k \neq |S_{i_1}| -1$. Ainsi, $x \notin S_{\overline{f_x}(i)}$ et par suite, $|S_{\overline{f_x}(i)}|= k$. Notons par $\overline{(f_y)^{-1}}$ l'isomorphisme du tournoi $(T_h)^*$ sur le tournoi T_h induit par $(f_y)^{-1}$. Il est clair que $\overline{(f_y)^{-1}} = (\overline{f_y})^{-1}$. D'où, $S_{\pi(i)} = S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))}$ et $S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))} - \{y\} = (f_y)^{-1}(S_{\overline{f_x}(i)} - \{y\})$. Comme $y \notin S_{\overline{f_x}(i)}$ (car $|S_{\overline{f_x}(i)}|= k$, $y \in S_{i_2}$ et $k \neq |S_{i_2}|$), alors $|S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))} - \{y\}| = |S_{\overline{f_x}(i)} - \{y\}|=|S_{\overline{f_x}(i)}|= k$. Si $y \in S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))}$, alors $\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i)) = i_2$ et $|S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))}|= k + 1$ et par suite $| S_{i_2} |= k + 1$; ce qui contredit le fait que $k \neq |S_{i_2}| -1$. Il s'ensuit que $y \notin S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))}$ et par suite, $|S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))}|= k$. Ainsi, $|S_{\pi(i)}|= k$ et l'entier k est alors régulièrement réparti dans T.

□

Lemme 14 *Si un entier $k \geq 2$ est régulièrement réparti dans T, alors pour tout $j \in \mathcal{Z}_k(T)$, T est symétrique par rapport à S_j.*

Preuve. Supposons qu'un entier $k \geq 2$ est régulièrement réparti dans T et soit $\pi \in \Omega_h - \{\pi_0\}$ tel que $\pi(\mathcal{Z}_k(T)) \subseteq \mathcal{Z}_k(T)$. Soient $j \in \mathcal{Z}_k(T)$ et $x \in S_j$. Comme $S_j - \{x\}$ est le seul intervalle maximal de cardinal $k - 1$ de $T - x$ et de $T^* - x$ qui se trouve sur un π-polygone de répartition dont les autres sommets sont des intervalles de cardinal k, alors $f_x(S_j - \{x\}) = S_j - \{x\}$. Le lemme 12 permet ensuite de conclure.

□

Considérons maintenant les deux lemmes suivants.

Lemme 15 *Si $m \geq 3$ et si $\mathcal{Z}_{m-1}(T) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{Z}_{m-1}(T)$ est réduit à un singleton $\{i_0\}$ tel que p_{i_0} est $\{-1\}$-autodual et T est symétrique par rapport à S_{i_0}.*

Preuve. Supposons par l'absurde que $m \geq 3$ et que $n_{m-1}(T) \geq 2$. D'aprés le lemme 13, l'entier m est alors régulièrement réparti dans T. Il s'ensuit, d'aprés le lemme 14, que pour tout $j \in \mathcal{Z}_m(T)$, T est symétrique par rapport à S_j. Ainsi, l'entier $n_m(T)$ est impair et donc d'aprés le lemme 8, l'entier $n_{m-1}(T)$ est pair. Considérons maintenant un élément i de $\mathcal{Z}_{m-1}(T)$ et un élément x de S_i. On a alors: $n_{m-1}(T-x) = n_{m-1}(T)-1$ qui est impair et $n_m(T-x) = n_m(T)$ qui est aussi impair. D'aprés le lemme 8, $T-x$ est donc non autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-1\}$-autodual. Ainsi, $n_{m-1}(T) = 1$. Posons alors $\mathcal{Z}_{m-1}(T) = \{i_0\}$ et montrons que T est symétrique par rapport à S_{i_0} et que p_{i_0} est $\{-1\}$-autodual.

Montrons d'abord que $n_m(T) \geq 2$. Pour cela, supposons par l'absurde que $n_m(T) = 1$ et distinguons les trois cas suivants.

◇ Si $m \geq 4$ et s'il existe un entier $k \in \{2, \ldots, m-2\}$ tel que $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$. Dans ce cas, considérons un élément i de $\mathcal{Z}_k(T)$ et un élément x de S_i. On a: $n_{m-1}(T-x) = n_{m-1}(T) = 1$ et $n_m(T-x) = n_m(T) = 1$. D'aprés le lemme 8, $T-x$ est donc non autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-1\}$-autodual.

◇ Si $m \geq 4$ et si pour tout entier $k \in \{2, \ldots, m-2\}$, $\mathcal{Z}_k(T) = \emptyset$. Dans ce cas, pour $x \in S_{i_0}$, on a: $n_{m-2}(T-x) = n_{m-2}(T)+1 = 1$ et $n_m(T-x) = n_m(T) = 1$ et donc d'aprés le lemme 8, $T-x$ est non autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-1\}$-autodual.

◇ Si $m = 3$. Dans ce cas, comme $n \geq 7$, alors $h \geq 2$ et sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = 3$. Considérons l'entier i défini par:
$$i = \begin{cases} h+1 & \text{si } 2 \in \{|S_h|, |S_{2h}|\} \\ h & \text{sinon} \end{cases}$$
On peut voir que S_i est réduit à un singleton $\{x\}$ et que $n_4(T-x) = n_2(T-x) = 1$; ce qui contredit l'autodualité de $T-x$, d'aprés le lemme 8. Ainsi, $n_m(T) \geq 2$.

Montrons maintenant que p_{i_0} est $\{-1\}$-autodual et que T est symétrique par rapport à S_{i_0}. Si $n_{m-2}(T) = 0$, alors le résultat découle de l'assertion (3) du lemme 12. Supposons donc que $n_{m-2}(T) \neq 0$. Comme $n_m(T) \geq 2$, alors d'aprés le lemme 13, l'entier $m-2$ est régulièrement réparti dans T. Soit $\pi \in \Omega_h - \{\pi_0\}$ tel que $\pi(\mathcal{Z}_{m-2}(T)) \subseteq \mathcal{Z}_{m-2}(T)$ et soit $x \in S_{i_0}$. Comme $S_{i_0} - \{x\}$ est le seul intervalle maximal de cardinal $m-2$ de $T-x$ et de $T^* - x$ qui se trouve sur un π-polygone de répartition dont aucun autre sommet n'est de cardinal $m-2$, alors $f_x(S_{i_0} - \{x\}) = S_{i_0} - \{x\}$ et donc, d'aprés l'assertion (2) du lemme 12, T est symétrique par rapport à S_{i_0}. Par ailleurs, comme $f_x(S_{i_0} - \{x\}) = S_{i_0} - \{x\}$, pour tout $x \in S_{i_0}$, alors p_{i_0} est $\{-1\}$-autodual.

□

Lemme 16 *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(1) *Si $m \geq 3$ et si l'entier $n_m(T)$ est impair, alors:*

   (a) *Pour tout $j \in \mathcal{Z}_m(T)$, T est symétrique par rapport à S_j.*

   (b) *Pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $|S_i| \in \{1, m\}$.*

(2) *Si $m \geq 3$ et si l'entier $n_m(T)$ est pair, alors:*

(a) $\mathcal{Z}_{m-1}(T)$ *est réduit à un singleton* $\{i_0\}$ *et* T *est symétrique par rapport à* S_{i_0}.

(b) *Pour tout* $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{i_0\}$, $|S_i| \in \{1, m\}$.

(3) *Le tournoi* T *est autodual.*

Preuve. (1) Supposons que $m \geq 3$ et que l'entier $n_m(T)$ est impair. À l'aide du lemme 15, on peut voir que $n_{m-1}(T) = 0$ et par suite, pour tout $j \in \mathcal{Z}_m(T)$, le tournoi T est symétrique par rapport à S_j, d'aprés l'assertion (3) du lemme 12. Il reste à montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $|S_i| \in \{1, m\}$. Si $m = 3$, le résultat est trivial. Supposons par l'absurde que $m \geq 4$ et qu'il existe un entier $k \in \{2, \ldots, m-2\}$ tel que $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$. Pour conclure, nous distinguons les deux cas suivants.

◇ Si l'entier $n_k(T)$ est impair. Dans ce cas, soit $i \in \mathcal{Z}_m(T)$ et soit $x \in S_i$. On a: $n_{m-1}(T - x) = 1$ et $n_k(T - x) = n_k(T)$ est impair; ce qui contredit l'autodualité de $T - x$, d'aprés le lemme 8.

◇ Si l'entier $n_k(T)$ est pair. Dans ce cas, soit $i \in \mathcal{Z}_k(T)$ et soit $x \in S_i$. On a: $n_k(T - x) = n_k(T) - 1$ est impair et $n_m(T - x) = n_m(T)$ est impair; ce qui contredit l'autodualité de $T - x$, d'aprés le lemme 8.

(2) Supposons que $m \geq 3$ et que l'entier $n_m(T)$ est pair. Si $n_{m-1}(T) = 0$, en utilisant l'assertion (3) du lemme 12, on déduit que $n_m(T)$ est impair; ce qui est absurde. Ainsi, $n_{m-1}(T) \neq 0$ et par suite, d'aprés le lemme 15, $\mathcal{Z}_{m-1}(T)$ est réduit à un singleton $\{i_0\}$ et T est symétrique par rapport à S_{i_0}. Il reste à montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{i_0\}$, $|S_i| \in \{1, m\}$. Si $m = 3$, le résultat est trivial. Supposons par l'absurde que $m \geq 4$ et qu'il existe un entier $k \in \{2, \ldots, m-2\}$ tel que $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$. Pour conclure, nous distinguons les deux cas suivants.

◇ Si l'entier $n_k(T)$ est impair. Dans ce cas, soit $i \in \mathcal{Z}_m(T)$ et soit $x \in S_i$. On a: $n_m(T - x) = n_m(T) - 1$ est impair et $n_k(T - x) = n_k(T)$ est impair; ce qui contredit l'autodualité de $T - x$, d'aprés le lemme 8.

◇ Si l'entier $n_k(T)$ est pair. Dans ce cas, soit $i \in \mathcal{Z}_k(T)$ et soit $x \in S_i$. On a: $n_k(T - x) = n_k(T) - 1$ est impair et $n_{m-1}(T - x) = n_{m-1}(T) = 1$; ce qui contredit l'autodualité de $T - x$, d'aprés le lemme 8.

(3) Si $m \geq 3$, l'autodualité de T découle des assertions (1) et (2) et du corollaire 7. Si $m \leq 2$, alors T est sans diamants et on conclut alors à l'aide du lemme 10.

□

Preuve de la proposition 10. Supposons que $h = 1$. Comme $n \geq 7$, alors $m \geq 3$. Si $|\mathcal{Z}(T)| = 1$, alors d'aprés le lemme 11, le tournoi T est un presque-ordre total. Supposons dans la suite que $|\mathcal{Z}(T)| \geq 2$. Suivant la parité de l'entier $n_m(T)$, on distingue les deux cas suivants.

• Si l'entier $n_m(T)$ est impair. Dans ce cas, d'aprés le lemme 16, pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, $|S_i| = m$, T est symétrique par rapport à S_i et p_i est autodual. Comme T est symétrique par rapport à S_0, alors $p_1 \simeq (p_2)^* \simeq p_2$ et comme T est symétrique par rapport à S_1, alors $p_0 \simeq (p_2)^* \simeq p_2$ Ainsi, T est le produit lexicographique du tournoi T_1 par le tournoi p_0. Notons que de l'assertion (3) du lemme 12, on déduit que p_0 est $\{-1\}$-autodual.

• Si l'entier $n_m(T)$ est pair. Dans ce cas, d'aprés le lemme 16, $n_{m-1}(T) = 1$ et $n_m(T) = 2$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m - 1$ et $|S_1| = |S_2| = m$. Ainsi, d'aprés le lemme 16, T est symétrique par rapport à S_0 et par suite $p_1 \simeq (p_2)^*$. Or tous les p_i sont autoduaux d'aprés le lemme 12, donc $p_1 \simeq p_2$. Pour tout sommet x de p_1 on a: $S_1 - \{x\}$ et S_0 sont les seuls intervalles maximaux de $T - x$ et de $T^* - x$ de cardinal $m - 1$. D'où, $f_x(S_1 - \{x\}) = S_0$ et $f_x(S_2) = S_2$. Il s'ensuit que $(p_1 - x) \simeq (p_0)^* \simeq p_0$. Ainsi, p_1 est $\{-1\}$-monomorphe et $\{-1\}$-autodual. D'autre part, d'aprés l'assertion (3) du lemme 12, p_0 est $\{-1\}$-autodual. Il s'ensuit que p_1 est $\{-2\}$-autodual. Ainsi, T est obtenu par la suppression d'un sommet du produit lexicographique du tournoi T_1 par le tournoi p_1.

Preuve de la proposition 11. Supposons que $h \geq 2$ et que $m \geq 3$. Suivant la parité de l'entier $n_m(T)$, on distingue les deux cas suivants.

• Si l'entier $n_m(T)$ est impair. Dans ce cas, d'aprés le lemme 16, pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, $|S_i| \in \{1, m\}$ et pour tout $i \in \mathcal{Z}_m(T)$, T est symétrique par rapport à S_i. Comme $h \geq 2$, alors du lemme 11, on déduit que $n_m(T) \geq 3$.

Montrons d'abord qu'il existe $i_0 \in \{0, \dots, 2h\}$ tel que $|S_{i_0}| = |S_{i_0+1}| = m$ où l'entier $i_0 + 1$ est considéré modulo $2h + 1$. Supposons par l'absurde que pour tout $i \in \mathcal{Z}_m(T)$, $i+1 \in \mathcal{Z}_1(T)$ où l'entier $i+1$ est considéré modulo $2h+1$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m$. Il s'ensuit que $|S_1| = 1$ et que le tournoi T est symétrique par rapport à S_0. Ainsi, $|S_1| = |S_{2h}| = 1$ et $|S_h| = |S_{h+1}| = 1$. Posons $S_1 = \{x_1\}$. Si $|S_{h+2}| = 1$, alors d'aprés la remarque 6, $T - x_1$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1} ayant l'ensemble $I = S_{h+1} \cup S_{h+2}$ comme seul intervalle maximal de cardinal 2 et par suite, $n_2(T - x_1) = 1$ et $n_m(T - x_1) = n_m(T)$ est impair; ce qui contredit l'autodualité de $T - x_1$, d'aprés le lemme 8. Il s'ensuit que: $|S_{h+2}| = m$, $h \geq 3$ et T est symétrique par rapport à S_{h+2}. En considérant alors l'isomorphisme α de T sur T^* qui laisse fixe S_{h+2}, on déduit que $\alpha(S_1) = S_2$, d'aprés le corollaire 6. Ainsi, $|S_2| = |S_1| = 1$. Le tournoi $T - x_1$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1} ayant l'ensemble $I = S_{h+1} \cup S_{h+2}$ comme seul intervalle maximal de cardinal $m+1$ et par suite, $f_{x_1}(I) = I$. D'où, $f_{x_1}(S_0) = S_2$, d'aprés le corollaire 6. Il s'ensuit que $|S_2| = |S_0| = m$; ce qui contredit le fait que $|S_2| = 1$. Ainsi, il existe $i_0 \in \{0, \dots, 2h\}$ tel que $|S_{i_0}| = |S_{i_0+1}| = m$ où l'entier $i_0 + 1$ est considéré modulo $2h + 1$. Sans perdre de généralité, on peut supposer alors dans la suite que $|S_0| = |S_1| = m$.

Montrons maintenant que pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, $| S_i |= m$. Comme T est symétrique par rapport à S_0, alors il suffit de montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, h\}$, $| S_i |= m$. Comme $| S_0 |= m$ et T est symétrique par rapport à S_1, alors $| S_2 |= m$. Ainsi, le résultat est vérifié si $h = 2$. Supposons alors que $h \geq 3$ et soit $j \in \{2, \dots, h-1\}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$, $|S_i |= m$. Comme $| S_{j-1} |= m$ et T est symétrique par rapport à S_j, alors $| S_{j+1} |= m$. Il s'ensuit alors que pour tout $i \in \{1, \dots, h\}$, $|S_i |= m$.

Montrons enfin que pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, $p_i \simeq p_0$. Comme tous les p_i sont autoduaux (d'aprés le lemme 12) et comme le tournoi T est symétrique par rapport à S_0, alors il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, h\}$, $p_i \simeq p_0$. En utilisant le fait que T est symétrique par rapport à S_{h+1}, on déduit d'aprés le corollaire 6 que $p_1 \simeq (p_0)^\star$ et par suite $p_1 \simeq p_0$. Soit $i \in \{1, \dots, h-1\}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, i\}$, $p_j \simeq p_0$. Comme T est symétrique par rapport à S_{i+h+1}, alors d'aprés le corollaire 6, $p_{i+1} \simeq (p_i)^\star$, et par suite $p_{i+1} \simeq p_i \simeq p_0$. Il s'ensuit que pour tout $i \in \{1, \dots, h\}$, $p_i \simeq p_0$.

Ainsi, le tournoi T est le produit lexicographique du tournoi T_h par le tournoi p_0. Notons que d'aprés l'assertion (3) du lemme 12, le tournoi p_0 est $\{-1\}$-autodual.

- Si l'entier $n_m(T)$ est pair. Dans ce cas, d'aprés le lemme 16, $n_{m-1}(T) = 1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, $|S_i| \in \{1, m-1, m\}$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0 |= m-1$ et par suite, pour tout $i \in \{1, \dots, 2h\}$, $|S_i| \in \{1, m\}$. Il s'ensuit d'aprés le lemme 15, que T est symétrique par rapport à S_0 et que p_0 est $\{-1\}$-autodual.

Montrons d'abord que pour tout $i \in \{1, \dots, 2h\}$, $| S_i |= m$. Comme T est symétrique par rapport à S_0, alors il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, h\}$, $| S_i |= m$. Pour montrer que $| S_1 |= m$, on considère l'entier $t_0 = \min(\{t;\ t \in \{1, \dots, h\}$ et $| S_t |= m\})$ et on suppose par l'absurde que $t_0 \geq 2$. Soit $x \in S_{t_0}$. Il est clair que S_0 et $S_{t_0} - \{x\}$ sont les seuls intervalles maximaux de $T - x$ et de $T^\star - x$ de cardinal $m-1$. L'isomorphisme f_x échange donc S_0 et $S_{t_0} - \{x\}$ et laisse fixe un certain S_{j_0} où $j_0 \in \mathcal{Z}_m(T-x)$ (car $n_m(T-x) = n_m(T) - 1$ est impair). Posons $H = S_1 \cup \ldots \cup S_{t_0 - 1}$ et rappelons que pour tout $i \in \{1, \dots, t_0 - 1\}$, $| S_i |= 1$. Du corollaire 6, on déduit que $f_x(H) = H$ et que pour tout $i \in \{1, \dots, t_0 - 1\}$, $f_x(S_i) \neq S_i$. Il s'ensuit que $t_0 - 1$ est pair et donc t_0 est impair et $3 \leq t_0 \leq h$. Posons $t_0 = 2q + 1$. D'aprés le corollaire 6, on déduit que $j_0 = \frac{t_0+1}{2} + h = q + 1 + h$ et donc $| S_{q+1+h} |= m$. En posant $S_q = \{y\}$, on voit d'aprés la remarque 6, que $T - y$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1}, ayant un intervalle $I = S_{q+h} \cup S_{q+h+1}$, qui est le seul de son cardinal (car $|I| \in \{m+1, 2m\}$) et par suite $n_{|I|}(T-y) = 1$ et $n_{m-1}(T-y) = n_{m-1}(T) = 1$; ce qui contredit l'autodualité de $T - y$, d'aprés le lemme 8. Ainsi, nous avons montré que $|S_1 |= m$. Soit $i \in \{1, \dots, h-1\}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, i\}$, $|S_j |= m$ et soit $x \in S_i$. Comme S_0 et $S_i - x$ sont les seuls intervalles maximaux de $T - x$ et de $T^\star - x$ de cardinal $m-1$, alors f_x échange S_0 et $S_i - x$ et laisse fixe un certain S_{j_0} où $j_0 \in \mathcal{Z}_m(T-x)$. D'aprés le corollaire 6, $f_x(S_{2h}) = S_{i+1}$. Comme $| S_{2h} |=| S_1 |= m$ (car T est symétrique par rapport à S_0 et $| S_1 |= m$), alors $| S_{i+1} |= m$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, h\}$, $| S_i |= m$.

Montrons maintenant que pour tout $i \in \{1, \dots, 2h\}$, $p_i \simeq p_1$. Comme chaque p_i est autodual d'aprés le lemme 12, et comme T est symétrique par rapport à S_0, alors il suffit de montrer que pour tout $i \in \{2, \dots, h\}$, $p_i \simeq p_1$. Soient $i \in \{2, \dots, h\}$ et $x \in S_{i-1}$. Comme S_0 et $S_{i-1} - \{x\}$ sont les seuls intervalles maximaux de $T - x$ et de $T^\star - x$ de cardinal $m - 1$, alors $f_x(S_{i-1} - \{x\}) = S_0$ et par suite, $f_x(S_i) = S_{2h}$, d'aprés le corollaire 6. D'où, $p_i \simeq (p_{2h})^\star$. Comme T est symétrique par rapport à S_0, alors $(p_{2h})^\star \simeq p_1$ et par suite $p_i \simeq p_1$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, 2h\}$, $p_i \simeq p_1$.

Enfin, comme pour tout $x \in S_1$, S_0 et $S_1 - \{x\}$ sont les seuls intervalles maximaux de $T - x$ et de $T^\star - x$ de cardinal $m - 1$, alors $f_x(S_1 - \{x\}) = S_0$. D'où, pour tout $x \in S_1$, $(p_1 - x) \simeq (p_0)^\star \simeq p_0$ et par suite p_1 est $\{-1\}$-monomorphe et $\{-1\}$-autodual. D'autre part, comme p_0 est $\{-1\}$-autodual, alors p_1 est $\{-2\}$-autodual.

Ainsi, T est obtenu par la suppression d'un sommet du produit lexicographique du tournoi T_h par le tournoi p_1.

Preuve de la proposition 12. Pour la preuve, nous utilisons en outre les notations suivantes.
Pour tout tournoi $R = T_h(R_0, \dots, R_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, R_i est un tournoi sur un ensemble ζ_i, on considère les quatre ensembles suivants.

$\mathcal{A}_1(R) = \{\zeta_i \in \mathcal{P}_1(R);\ | \zeta_{i+h} |=| \zeta_{i+h+1} |= 1\}$,
$\mathcal{A}_2(R) = \{\zeta_i \in \mathcal{P}_1(R);\ | \zeta_{i+h} |= 2$ et $| \zeta_{i+h+1} |= 1\}$,
$\mathcal{A}_3(R) = \{\zeta_i \in \mathcal{P}_1(R);\ | \zeta_{i+h} |= 1$ et $| \zeta_{i+h+1} |= 2\}$ et
$\mathcal{A}_4(R) = \{\zeta_i \in \mathcal{P}_1(R);\ | \zeta_{i+h} |=| \zeta_{i+h+1} |= 2\}$.

Remarquons que $\mathcal{A}_1(R) = \mathcal{A}_1(R^\star)$, $\mathcal{A}_2(R) = \mathcal{A}_3(R^\star)$, $\mathcal{A}_3(R) = \mathcal{A}_2(R^\star)$ et $\mathcal{A}_4(R) = \mathcal{A}_4(R^\star)$.

Revenons au tournoi T et supposons que $m = 2$ et que $h \geq 2$. Comme le tournoi T est autodual d'aprés le lemme 16, alors d'aprés le corollaire 7, on peut supposer que T est symétrique par rapport à S_0. Dans la suite de cette preuve, les indices sont considérés modulo $2h + 1$. Notons par Φ_0, un isomorphisme de T sur $T^\star$ tel que $\Phi_0(S_0) = S_0$. D'aprés le corollaire 6, pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, $\Phi_0(S_i) = S_{-i}$. Suivant la parité de l'entier $n_2(T)$, on distingue les deux cas suivants.

- Si l'entier $n_2(T)$ est impair. Dans ce cas, $| S_0 |= 2$ et la morphologie du tournoi T découle des 5 étapes suivantes.

Étape 1. $\mathcal{A}_4(T) = \emptyset$.
En effet: supposons par l'absurde qu'il existe $i \in \{1, \dots, 2h\}$ tel que S_i est réduit à un singleton $\{x\}$ et $| S_{i+h} |=| S_{i+h+1} |= 2$. D'aprés la remarque 6, le tournoi

$T-x$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1} ayant l'ensemble $I = S_{i+h} \cup S_{i+h+1}$ comme seul intervalle maximal de cardinal 4 et par suite, $n_4(T-x) = 1$ et $n_2(T-x) = n_2(T) - 2$ est impair. Il s'ensuit que $T-x$ est non autodual d'aprés le lemme 8; ce qui contredit le fait que T est $\{-1\}$-autodual.

Étape 2. Si $|S_1|= 2$, alors pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $|S_i|= 2$.
En effet: comme T est symétrique par rapport à S_0, il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1,\ldots,h\}$, $|S_i|= 2$. On a $|S_1|= 2$. Soit $j \in \{1,\ldots,h-1\}$ tel que pour tout $k \in \{1,\ldots,j\}$, $|S_k|= 2$. D'aprés l'étape 1, $|S_{h+1}|= 2$. Posons $\{x,y\} = S_{h+1}$. On a $f_x(\mathcal{A}_4(T-x)) = \mathcal{A}_4(T^\star - x)$ et $\mathcal{A}_4(T-x) = \mathcal{A}_4(T^\star - x) = \{y\}$. D'où, $f_x(y) = y$ et donc d'aprés le corollaire 6, $f_x(S_0) = S_1$. Comme $f_x(S_{h+1} - \{x\}) = S_{h+1} - \{x\}$, alors d'aprés l'assertion (2) du lemme 12, il existe un isomorphisme f de T sur $T^\star$ laissant fixe S_{h+1}. Ainsi, d'aprés le corollaire 6, pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $f(S_i) = S_{1-i}$. On a $\Phi_0(S_j) = S_{-j}$ et $f(S_{-j}) = S_{j+1}$, et par suite, $|S_{j+1}| = |S_{-j}| = |S_j|= 2$; ce qui permet de conclure.

Étape 3. Si $|S_1|= 1$ et si $h = 2$, alors $n = 8$, $|S_4|= 1$ et $|S_2|=|S_3|= 2$.
En effet: il suffit de voir que $n \geq 7$ et que T est symétrique par rapport à S_0.

Étape 4. Si $|S_1|= 1$ et si $h \geq 3$, alors $|S_h|=|S_{h+1}|= 1$.
En effet: supposons par l'absurde que $|S_h|= 2$. Comme T est symétrique par rapport à S_0, alors $|S_h|=|S_{h+1}|= 2$. Comme $|S_1|= 1$, alors d'aprés l'étape 1, $|S_{h+2}|= 1$. Posons $S_1 = \{x\}$ et $S_{h+2} = \{y\}$. L'ensemble $I = S_{h+1} \cup S_{h+2}$ est le seul intervalle maximal de cardinal 3 de $T - x$ et de $T^\star - x$. D'où, $f_x(I) = I$ et donc d'aprés le corollaire 6, $f_x(S_0) = S_2$ et $f_x(S_{2h}) = S_3$. Il s'ensuit que $|S_0|=|S_2|= 2$, $|S_3|=|S_{2h}|=|S_1|= 1$ et $h \geq 4$. D'autre part, l'ensemble $J = S_1 \cup S_2$ est le seul intervalle maximal de cardinal 3 de $T-y$ et de $T^\star - y$. D'où, $f_y(J) = J$ et donc d'aprés le corollaire 6, $f_y(S_0) = S_3$. Ainsi, $|S_3|=|S_0|= 2$; ce qui contredit le fait que $|S_3|= 1$.

Étape 5. Si $|S_1|= 1$ et si $h \geq 3$, alors pour tout $i \in \{1,\ldots,2h\}$, $|S_i|= 1$.
En effet: comme T est symétrique par rapport à S_0, alors il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1,\ldots,h\}$, $|S_i|= 1$. On a $|S_1|= 1$. Soit $j \in \{1,\ldots,h-1\}$ tel que pour tout $k \in \{1,\ldots,j\}$, $|S_k|= 1$. D'aprés l'étape 4, $|S_{h+1}|=|S_h|= 1$. Posons $S_{h+1} = \{x\}$. D'aprés la remarque 6, le tournoi $T-x$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1}, ayant l'ensemble $I = S_0 \cup S_1$ comme seul intervalle maximal de cardinal 3 et donc $f_x(I) = I$ et par suite d'aprés le corollaire 6, pour tout $i \in \{2,\ldots,h\} \cup \{h+2,\ldots,2h\}$, $f_x(S_i) = S_{1-i}$. Il s'ensuit que $f_x(S_{-j}) = S_{j+1}$. Comme en plus, $\Phi_0(S_j) = S_{-j}$, alors $|S_{j+1}| = |S_{-j}| = |S_j|= 1$; ce qui permet de conclure.

- Si l'entier $n_2(T)$ est pair. Dans ce cas, $|S_0|= 1$ et $n_1(T)$ est impair. On va montrer en 4 étapes, que pour tout $i \in \{1,\ldots,2h\}$, $|S_i|= 2$.

Étape 1. $\mathcal{A}_2(T) = \mathcal{A}_3(T) = \emptyset$.
En effet: supposons par l'absurde qu'il existe $i \in \{1, \ldots, 2h\}$ tel que S_i est réduit à un singleton $\{x\}$ et $\{| S_{i+h} |, | S_{i+h+1} |\} = \{1, 2\}$. D'aprés la remarque 6, le tournoi $T - x$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1}, ayant l'ensemble $I = S_{i+h} \cup S_{i+h+1}$ comme seul intervalle maximal de cardinal 3. D'où, $n_3(T - x) = 1$ et $n_2(T - x) = n_2(T) - 1$ est impair. Il s'ensuit que $T - x$ est non autodual d'aprés le lemme 8; ce qui contredit le fait que T est $\{-1\}$-autodual.

Étape 2. S'il existe $i \in \{0, \ldots, 2h\}$ tel que $| S_i |= 1$ et $| S_{i+1} |= 2$, alors $| S_{i+h} |=| S_{i+h+1} |= 2$ et pour tout $x \in S_{i+h+1}$, $f_x(S_i) = S_{i+h+1} - \{x\}$. De plus, pour tout $j \in \{0, \ldots, 2h\} - \{i, i + h + 1\}$, $| S_j | = | S_{2i+h+1-j} |$.
En effet: d'aprés l'étape précédente, pour un tel i, on voit que $| S_{i+h+1} |= 2$, puis que $| S_{i+h} |= 2$. Soit $x \in S_{h+i+1}$ et posons $S_{h+i+1} - \{x\} = \{y\}$ et $S_i = \{z\}$. On a: $f_x(\mathcal{A}_3(T - x)) = \mathcal{A}_3(T^* - x)$, $\mathcal{A}_3(T - x) = \mathcal{A}_2(T^* - x) = \{y\}$ et $\mathcal{A}_2(T-x) = \mathcal{A}_3(T^*-x) = \{z\}$. D'où, $f_x(y) = z$. Ainsi, $f_x(S_i) = S_{i+h+1} - \{x\}$ et d'aprés le corollaire 6, pour tout $j \in \{0, \ldots, 2h\} - \{i, i+h+1\}$, $| S_j |=| S_{2i+h+1-j} |$.

Étape 3. $| S_1 |= 2$.
En effet: supposons par l'absurde que $| S_1 |= 1$. Comme $| S_0 |= 1$ et T est symétrique par rapport à S_0, alors on peut considérer l'entier $i = \min(\{k;\ k \in \{2, \ldots, h\}$ et $| S_k |= 2\})$. On a $i \geq 2$, $| S_i |= 2$ et $| S_{i-1} |=| S_{i-2} |= 1$. D'aprés l'étape 2, $| S_{i-1+h} |=| S_{i+h} |= 2$. Posons $S_{i-1} = \{x\}$. D'aprés la remarque 6, le tournoi $T - x$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1}, ayant l'ensemble $I = S_{i-1+h} \cup S_{i+h}$ comme seul intervalle maximal de cardinal 4. D'où, $f_x(I) = I$ et par suite d'aprés le corollaire 6, $f_x(S_{i-2}) = S_i$. Il s'ensuit que $| S_{i-2} |=| S_i |= 2$; ce qui contredit le fait que $| S_{i-2} |= 1$.

Étape 4. Pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $| S_i |= 2$.
En effet: comme T est symétrique par rapport à S_0, il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, $| S_i |= 2$. On a $| S_1 | = 2$ d'aprés l'étape 3. Soit $j \in \{1, \ldots, h - 1\}$ tel que pour tout $k \in \{1, \ldots, j\}$, $| S_k |= 2$. Comme $| S_0 |= 1$ et $| S_1 |= 2$, alors de l'étape 2, on déduit que $| S_h | = | S_{h+1} |= 2$ et que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{0, h + 1\}$, $| S_i |=| S_{h+1-i} |$. D'où, $| S_{-j} | = | S_{h+1-(-j)} | = | S_{h+1+j} |$. Comme en plus, $\Phi_0(S_j) = S_{-j}$, alors $| S_{h+1+j} |=| S_{-j} |=| S_j |= 2$. Par ailleurs, on a: $\Phi_0(S_{h+1+j}) = S_{h-j}$ et $| S_{h-j} |=| S_{h+1-(h-j)} |=| S_{1+j} |$. Il s'ensuit que, $| S_{1+j} |=| S_{h-j} |=| S_{h+1+j} |= 2$; ce qui permet de conclure.

5 Preuve de la proposition 7

Considérons d'abord la remarque suivante.

Remarque 7 *Pour tout entier $h \geq 1$, notons par $\widetilde{\mathcal{D}}(T_h)$, la classe des tournois fortement connexes dont le squelette est le tournoi T_h.*

(1) *De l'assertion* (3) *du lemme 16, on voit que tout tournoi à au moins* 7 *sommets,* $\{-1\}$*-autodual et apartenant à* $\bigcup_{h\geq 1} \widetilde{\mathcal{D}}(T_h)$*, est autodual.*

(2) *Soient un entier* $k \geq 2$ *et un tournoi* T *à au moins* $6+k$ *sommets, appartenant à* $\bigcup_{h\geq 1} \widetilde{\mathcal{D}}(T_h)$ *tel que pour tout ensemble* X *à* $k-1$ *sommets de* T*, le tournoi* $T-X$ *appartient aussi à* $\bigcup_{h\geq 1} \widetilde{\mathcal{D}}(T_h)$*. De l'assertion* (1)*, on déduit que si* T *est* $\{-k\}$*-autodual, alors* T *est aussi* $\{-(k-1)\}$*-autodual.*

Preuve de la proposition 7. Soit $T = T_h(p_0, \dots, p_{2h})$ un tournoi à $n \geq 8$ sommets, où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et soit $m = \max(\{|S_i|;\ i \in \{0, \dots, 2h\}\})$. Notons d'abord que pour chacune des situations citées dans la proposition 7, en considérant un sommet arbitraire x de T, on vérifie que le tournoi $T - x$ est $\{-1\}$-autodual, d'aprés la remarque 6 et les propositions 10, 11 et 12, et par suite, le tournoi T est $\{-2\}$-autodual. Supposons dans la suite que T est $\{-2\}$-autodual et que $m \geq 2$. Suivant les valeurs de m et de h, on distingue les trois cas suivants.

• Cas 1. Si $h = 1$. Dans ce cas, comme $n \geq 8$, alors $m \geq 3$. Distinguons les sous-cas suivants.

⋄ Si pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, $|S_i| \geq 2$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est aussi $\{-1\}$-autodual et par suite le tournoi T vérifie l'une des deux situations (b) et (c) citées dans la proposition 10. Supposons par l'absurde que T vérifie la situation (c) de la proposition 10 et considérons un élément x d'un certain $S_i \in \mathcal{P}_m(T)$. On voit d'aprés la proposition 10, que $T - x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual. Il s'ensuit que T est le produit lexicographique du tournoi T_1 par un tournoi τ à m sommets, autodual et $\{-1\}$-autodual. Soit $x \in S_0$. Comme $T - x$ est $\{-1\}$-autodual, alors d'aprés la proposition 10, τ est $\{-1\}$-monomorphe et $\{-2\}$-autodual. Ainsi, le tournoi T vérifie la situation (d) de la proposition 7.

⋄ S'il existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tel que $|S_i| = 1$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m$. Supposons par l'absurde que $\max(|S_2|, |S_1|) \geq 2$ et que $\min(|S_2|, |S_1|) = 1$ et soit $x \in S_0$. D'aprés la proposition 10, $T - x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual. Ainsi, $|S_1| = |S_2| = 1$. Dans ce cas, comme $n \geq 8$, alors $m \geq 6$. Soit $x \in S_0$. Comme $T - x$ est $\{-1\}$-autodual, alors d'aprés la proposition 10, $T - x$ est un presque-ordre total. D'où, pour tout $x \in S_0$, $p_0 - x$ est un ordre total. Il s'ensuit que p_0 est aussi un ordre total et par suite, T est un presque-ordre total. Ainsi, le tournoi T vérifie la situation (a) de la proposition 7.

• Cas 2. Si $h \geq 2$ et si $m = 2$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est aussi $\{-1\}$-autodual et par suite, le tournoi T vérifie l'une des quatre situations citées dans la proposition 12.

◇ Supposons par l'absurde que T vérifie la situation (b) de la proposition 12. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0|= 1$ et que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $|S_i|= 2$. Soit $x \in S_1$. D'aprés la proposition 12, $T - x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual.

◇ Supposons par l'absurde que T vérifie la situation (c) de la proposition 12. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0|= 2$ et que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $|S_i|= 1$. Soit $x \in S_1$. D'aprés la remarque 6 et la proposition 12, $T - x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual.

◇ Supposons par l'absurde que T vérifie la situation (d) de la proposition 12. Dans ce cas, soit $x \in S_0$. D'aprés la proposition 12, $T - x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual.

Ainsi, le tournoi T vérifie la situation (c) de la proposition 7.

• Cas 3. Si $h \geq 2$ et si $m \geq 3$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est aussi $\{-1\}$-autodual et par suite le tournoi T vérifie l'une des deux situations citées dans la proposition 11. Supposons par l'absurde que T vérifie la situation (b) de la proposition 11. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0|= m - 1$ et que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $|S_i|= m$. Soit $x \in S_1$. D'aprés la proposition 11, $T - x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual. Ainsi, T est le produit lexicographique de T_h par un tournoi τ à m sommets, autodual et $\{-1\}$-autodual. Soit $x \in S_0$. Comme le tournoi $T - x$ est $\{-1\}$-autodual, alors τ est $\{-1\}$-monomorphe et $\{-2\}$-autodual, d'aprés la proposition 11. Ainsi, le tournoi T vérifie la situation (d) de la proposition 7.

6 Preuve de la proposition 8

Soit $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ un tournoi à $n \geq 9$ sommets, où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et soit $m = \max(\{|S_i|; i \in \{0, \ldots, 2h\}\})$. Si T est un presque-ordre total, alors il est fortement autodual et par suite, il est $\{-3\}$-autodual. Réciproquement, supposons que T est $\{-3\}$-autodual. Suivant les valeurs de m et de h, on distingue les quatre cas suivants.

• Cas 1. Si $m = 1$. Dans ce cas, comme $n \geq 9$, alors T est isomorphe au tournoi T_h et $h \geq 4$. Soit x un sommet de T. D'aprés la remarque 6, le tournoi $T - x$ est isomorphe au tournoi obtenu à partir du tournoi T_{h-1} en dilatant un de ses sommets par un ordre total à 2 sommets. Ainsi, d'aprés la proposition 7, $T - x$ n'est pas $\{-2\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-3\}$-autodual.

• Cas 2. Si $h = 1$ et si $m \geq 2$. Dans ce cas, comme $n \geq 9$, alors $m \geq 3$. Distinguons les sous-cas suivants.

◇ Si pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, $|S_i|\geq 3$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est $\{-2\}$-autodual et par suite, de la proposition 7, on déduit que pour tout

$i \in \{0,1,2\}$, $|S_i| = m$. Soit $x \in S_0$. D'aprés la proposition 7, le tournoi $T - x$ n'est pas $\{-2\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-3\}$-autodual.

◇ Si $|\mathcal{Z}(T)| \geq 2$ et s'il existe $i \in \{0,1,2\}$ tel que $|S_i| \leq 2$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m$. Dans ce cas, soit $x \in S_0$. Comme $n \geq 9$, alors $m \geq 4$ et de la proposition 7, on déduit que $T - x$ n'est pas $\{-2\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-3\}$-autodual.

◇ Si $|\mathcal{Z}(T)| = 1$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m$ et que $|S_1| = |S_2| = 1$. Dans ce cas, comme $n \geq 9$, alors $m \geq 7$. Soit $x \in S_0$. Comme $T - x$ est $\{-2\}$-autodual, alors de la proposition 7, on déduit que $T - x$ est un presque-ordre total. Il s'ensuit que pour tout $x \in S_0$, $p_0 - x$ est un ordre total et par suite, p_0 est aussi un ordre total. Ainsi, le tournoi T est un presque-ordre total.

- Cas 3. Si $h = 2$ et si $m \geq 2$. Dans ce cas, distinguons les sous-cas suivants.

◇ Si pour tout $i \in \{0,\ldots,4\}$, $|S_i| \geq 2$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est aussi $\{-2\}$-autodual et par suite, de la proposition 7, on déduit que pour tout $i \in \{0,\ldots,4\}$, $|S_i| = m$. Soit $x \in S_0$. D'aprés la proposition 7, le tournoi $T-x$ n'est pas $\{-2\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-3\}$-autodual.

◇ S'il existe $i \in \{0,\ldots,4\}$ tel que $|S_i| = 1$. Dans ce cas, soit x un élément d'un certain S_j où $|S_j| = m$. D'aprés la proposition 7, la $\{-2\}$-autodualité du tournoi $T-x$ entraîne que $T-x \simeq T_2$. Il s'ensuit que $n = 6$; ce qui est absurde.

- Si $h \geq 3$ et si $m \geq 2$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est $\{-2\}$-autodual. D'aprés la proposition 7, on déduit donc que pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $|S_i| = m$. Soit $x \in S_0$. D'aprés la proposition 7, le tournoi $T - x$ n'est pas $\{-2\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-3\}$-autodual.

7 Preuve du corollaire 5

Pour la preuve, comme il est évident que l'assertion (c) implique l'assertion (a), alors on va montrer que l'assertion (a) implique l'assertion (b) puis, que l'assertion (b) implique l'assertion (c).

- Supposons l'assertion (a) et montrons l'assertion (b), par récurrence sur $k \geq 4$.

Pour $k = 4$; le résultat est trivial.

Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $k \geq 4$ et soit R un tournoi $\{-(k+1)\}$-autodual, à $n \geq 6 + (k+1)$ sommets. D'aprés la proposition 4, R est $\{4\}$-autodual et par suite, R est un tournoi sans diamants. Soit X un ensemble à k sommets de R. Comme $R - X$ est un tournoi sans diamants, à au moins 7 sommets, qui est $\{-1\}$-autodual, alors du lemme 10, découle que $R - X$ est autodual. Ainsi, le tournoi R est $\{-k\}$-autodual et par suite, d'aprés l'hypothèse de récurrence, R est $\{-4\}$-autodual.

• Supposons l'assertion (b) et montrons l'assertion (c). Dans ce cas, d'aprés la proposition 4, T est $\{4\}$-autodual (car $n \geq 10$) et par suite, T est un tournoi sans diamants. Soit X un ensemble à 3 sommets de T. Comme $T - X$ est un tournoi sans diamants, à au moins 7 sommets, qui est $\{-1\}$-autodual, alors d'aprés le lemme 10, $T - X$ est autodual. Ainsi, le tournoi T est $\{-3\}$-autodual et par suite, T est $\{4, -3\}$-autodual. On conclut alors par le corollaire 3.

Références

[1] M. Basso-Gerbelli, P. Ille, La reconstruction des relations définies par interdits, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I, (1993) 1229-1234.

[2] Y. Boudabbous, A. Boussairi, Reconstruction des tournois et dualité, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, (1995) 397-400.

[3] Y. Boudabbous, J. Dammak, P. Ille, Indecomposability and duality of tournaments, Discrete Math. 223 (2000) 55-82.

[4] A. Boussairi, Communication personnelle.

[5] A. Boussairi, Décomposabilité, dualité et groupes finis en théorie des relations. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, France (1995).

[6] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, Theoret. Comput. Sci. 3 (70) (1990) 343-358.

[7] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in: Orders, Description and Roles, M. Pouzet et D. Richard éd. North-Holland (1984) 313-342.

[8] R. Fraïssé, Abritement entre relations et spécialemnt entre chaînes, Symposi. Math. Instituto Nazionale di alta. Mathematica, 5, (1970) 203-251.

[9] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967) 25-66.

[10] C. Gnanvo, P. Ille, La reconstruction des tournois sans diamants, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38, (1992) 283-291.

[11] F. Harary, E. Palmer, On the problem of reconstructing tournament from subtournaments, Monatsh. Math. 71, (1967) 14-23.

[12] G. Lopez, L'indéformabilité des relations et multirelations binaires, Z. Math. Logik Grundlag. Math, 24, (1978) 303-317.

[13] G. Lopez, C. Rauzy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and (n-1), I, Z. Math. Logik Grundlag. Math, 38, (1992) 27-37.

[14] J. W. Moon, Topics on tournaments. Holts, Rinchard and Winston, New York (1968).

[15] M. Pouzet, Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations, Math. Zeitschr. 150, (1976) 117-134.

[16] K. B. Reid, C. Thomassen, Strongly self-complementary and hereditarily isomorphic tournaments, Monatshefte Math. 81, (1976) 291-304.

[17] J. H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191-205.

[18] S. M. Ulam, A collection of Mathematical problems, Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., Intrescience Publishers, Groningen, New York, 1960, 29.