On geometric lattices and matroids of arbitrary cardinality *

Hua Mao
(Department of Mathematics, Hebei University, Baoding 071002, China)
e-mail:yushengmao@263.net

Abstract

This paper studies in detail on the collection of closed sets of a matroid of arbitrary cardinality ordered by inclusion. The relation between the collection, in particular the collection of a simple matroid, and a finite length geometric lattice is dealt with. Finally, one obtains that up to isomorphism, a finite length geometric lattice is a simple matroid, and vice versa.

Key words geometric lattice; matroid; closed set; arbitrary cardinality
2002 AMSC 05B35 ; 06C10

1 Introduction and Preliminaries

It is well known that there are close relations between finite geometric lattices and matroids of finite cardinality and they play an important role in the studies of matroid theory and geometric lattice theory. However, to the best of my knowledge, the relation between geometric lattices and matroids of infinite cardinality has never been investigated.

Unfortunately, there is no single class of structures that one calls infinite matroids. Rather, various authors with differing motivations have studied a variety of classes of matroid-like structures on infinite sets. This paper will adopt the definition of infinite matroid in [1]. The definition has been successfully applied to the study on linear space and so on(see [1]). Here, a new application of this definition is shown in the following sections. In addition, this paper will first discuss the close relations between finite length geometric lattices and matroids of arbitrary cardinality, simultaneously, dealing with some properties on both geometric lattices and matroids by using the close relation between geometric lattices with finite length and matroids of arbitrary cardinality.

*This research is supported by Nature Science Foundation of China(10071076)(10371112)

We start by reviewing those aspects of matroid theory and lattice theory which we will need. First of all, we assume that E is some arbitrary–possibly infinite set and state the definition of a matroid of finite rank m in terms of its closed sets presented in [1].

Definition 1 [1] (1) Assume $m \in \mathbb{N}_0$ and $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Then the pair $M := (E, \mathcal{F})$ is called a *matroid of rank m with $\mathcal{F}$ as its closed sets*, if the following axioms hold:
(F1) $E \in \mathcal{F}$;
(F2) If $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, then $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;
(F3) Assume $F_0 \in \mathcal{F}$ and $x_1, x_2 \in E \setminus F_0$. Then one has either
(i)$\{F \in \mathcal{F} | F_0 \cup \{x_1\} \subseteq F\} = \{F \in \mathcal{F} | F_0 \cup \{x_2\} \subseteq F\}$ or
(ii) $F_1 \cap F_2 = F_0$ for certain $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ containing $F_0 \cup \{x_1\}$ or $F_0 \cup \{x_2\}$, respectively.
(F4) $m = max\{n \in \mathbb{N}_0 |$ there exist $F_0, F_1, ..., F_n \in \mathcal{F}$ with $F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n = E\}$.

(2) Suppose $M = (E, \mathcal{F})$ is some matroid of rank $m \in \mathbb{N}_0$, with $\mathcal{F}$ as its closed sets.

(i) The *closure operator* $\sigma = \sigma_M : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}$ of M is defined by $\sigma(A) := \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ A \subseteq F}} F$.

(ii) The *rank function* $\rho = \rho_M : \mathcal{P}(E) \to \{0, 1, ..., m\}$ of M is defined by $\rho(A) := max\{k \in \mathbb{N}_0 |$ there exist $F_0, F_1, ..., F_k \in \mathcal{F}$ with $F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_k = \sigma(A)\}$.

(iii) Assume $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. We say that F_2 *covers* F_1, if $F_1 \subset F_2$ and there does not exist some $F \in \mathcal{F}$ with $F_1 \subset F \subset F_2$.

(iv) Assume $F, F' \in \mathcal{F}$ satisfy $F \subseteq F'$. A chain $F = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n = F'$ of strictly increasing sets $F_0, F_1, ..., F_n \in \mathcal{F}$ is called a *maximal chain* between F and F', if each $F_j, 1 \leq j \leq n$, covers F_{j-1}; n is called the *length* of the given chain.

(v) M is called *simple*, if any subset $A \subseteq E$ with $|A| \leq 1$ lies in $\mathcal{F}$.

Lemma 1 [1] Assume $M = (E, \mathcal{F})$ is some matroid of rank $m < \infty$, with $\mathcal{F}$ as its closed sets. Then

(1) For any family $(F_i)_{i \in I}$ of closed sets in M one has also $F := \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$.

(2) For any $A \subseteq E$, the set $\sigma(A)$ is the smallest set in $\mathcal{F}$ containing A. In particular, one has $\sigma(A) = A$ if and only if $A \in \mathcal{F}$. Moreover, σ satisfies the following conditions, which characterize a closure operator:

$A \subseteq \sigma(A) = \sigma(\sigma(A))$ for all $A \subseteq E$; for $A \subseteq B \subseteq E$ one has $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$.

Furthermore, σ satisfies the following exchange condition:

For $A \subseteq E$ and $x, y \in E \setminus \sigma(A)$ one has $y \in \sigma(A \cup \{x\})$ if and only if $x \in \sigma(A \cup \{y\})$.

Indeed, (F3) implies either $\sigma(A \cup \{x\}) = \sigma(A \cup \{y\})$ or $\sigma(A \cup \{x\}) \cap \sigma(A \cup \{y\}) = \sigma(A)$ as claimed.

(3) $\rho(E) = m$ equals the rank of the matroid M.

(4) One has

(I) For $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ with $F_1 \subset F_2$ the following three statements are equivalent:

(i) F_2 covers F_1.

(ii) For all $x \in F_2 \setminus F_1$ one has $\sigma_M(F_1 \cup \{x\}) = F_2$.

(iii) There exists some $x \in F_2 \setminus F_1$ with $\sigma_M(F_1 \cup \{x\}) = F_2$.

(II) If $F \in \mathcal{F}$ and $x \in E \setminus F$, then $\sigma_M(F \cup \{x\})$ is the unique closed set which covers F and contains x.

(5) Suppose $F_0, F_1, F_1' \in \mathcal{F}$ are such that F_1 and F_1' both cover F_0. If $F_1 \neq F_1'$, then $A := \sigma_M(F_1 \cup F_1')$ covers both F_1 and F_1'.

(6) One has

(I) Suppose $F, F' \in \mathcal{F}$ satisfy $F \subsetneq F'$, and

$$F = F_0 \subset F_1' \subset ... \subset F_l' = F'; \qquad F = F_0' \subset F_1 \subset ... \subset F_k = F'$$

are maximal chains of closed sets between F and F'. Then one has $k = l$; that is, all maximal chains between F and F' have the same length.

(II) If F, F' are as in (I), then one has $\rho_M(F') - \rho_M(F) = k = l$. If, in particular, F' covers F, then we have $\rho_M(F') = \rho_M(F) + 1$.

Definition 2 (1) [2,p.1& 3,p.2] A *poset* is a set in which a binary relation $x \leq y$ is defined, which satisfies for all x, y, z the following conditions.

(p1) For all x, $x \leq x$.

(p2) If $x \leq y$ and $y \leq x$, then $x = y$.

(p3) If $x \leq y$ and $y \leq z$, then $x \leq z$.

By "*a covers b*" in a poset P, it is meant that $b < a$, but that $b < x < a$ for no $x \in P$, denoted by $b \prec a$.

[2,p.5] The *length*, $l(C)$, of a finite chain C is $|C| - 1$. A poset P is said to be of *length* n iff there is a chain in P of length n and all chains in P are of length $\leq n$. A *poset P is of finite length* iff it is of length n, for some natural number n. (For the definition of chain, cf.[2, p.2]).

[2,p.1] A poset P can contain at most one element a which satisfies $a \leq x$ for all $x \in P$. Such an element, if it exists, is denoted by 0, and is called the *least* element of P.

[2,p.5] In a poset P of finite length with 0, the *height* $h[x]$ of an element $x \in P$ is the lowest upper bound of the lengths of the chains $0 = x_0 < x_1 < ... < x_l = x$ between 0 and x. Clearly $h[x] = 1$ iff x covers 0; such elements are called "*atoms*" of P.

(2) [2,p.6 & 3,p.3] A poset $(L, \leq)$ is a *lattice* if infimum of $\{a, b\}$ and supremum of $\{a, b\}$ exist, for all $a, b \in L$. We write $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ and $\sup\{a, b\} = a \vee b$ and call $\wedge$ the *meet* and $\vee$ the *join* of a and b respectively.

[3, p.20] The lattices $\mathcal{L}_0 = (L_0, \vee, \wedge)$ and $\mathcal{L}_1 = (L_1, \vee, \wedge)$ are *isomorphic*, and the map $\varphi : L_0 \to L_1$ is an *isomorphism* iff φ is one-to-one and onto and $(a \vee b)\varphi = a\varphi \vee b\varphi, (a \wedge b)\varphi = a\varphi \wedge b\varphi$ for all $a, b \in L_0$.

[2, p.16] By a *complement* of x in a lattice L with 0(the minimum element in L) and I(the maximum element in L) is meant an element $y \in L$ such that $x \wedge y = 0$ and $x \vee y = I$; L is called *complemented* if all its elements have complements. A lattice is called *relatively complemented* if all its (closed) intervals are complemented.

(3) [3, p.225] A lattice L is called *semimodular* iff it satisfies for $a, b \in L$: $a \prec b$ implies for $c \in L$: $a \vee c \prec b \vee c$ or $a \vee c = b \vee c$.

[3, p.31] A lattice L is called *complete* if $\wedge H$ and $\vee H$ exist, for any subset $H \subseteq L$.

[3, p.106] Let L be a complete lattice and $a \in L$. Then a is called *compact* iff $a \leq \vee X$, for some $X \subseteq L$, implies that $a \leq \vee X_1$, for some finite $X_1 \subseteq X$.

A complete lattice is called *algebraic* iff every element is the join of compact elements.

[3, p.234] A lattice L is called *geometric* iff L is semimodular, L is algebraic, and the compact elements of L are exactly the finite joins of atoms of L.

Lemma 2 (1) [3, p.226] Let L be a lattice of finite length. If L is semimodular, then any two maximal chains of L are of the same length.

(2) [3, p.226] Let L be a lattice of finite length. The following conditions on L are equivalent.

(i) L is semimodular.

(ii) For all $a, b \in L$, if $a \neq b, a$ and b cover $a \wedge b$, then $a \vee b$ covers a and b.

(3) [3,p.31] Let P be a poset in which $\wedge H$ exists, for all $H \subseteq P$. Then P is a complete lattice.

(4) [2,p.81] In a semimodular lattice of finite length, if p is an atom, then either $p \leq a$ or $a \vee p$ covers a.

Next we generalize the definition of isomorphic for two matroids of finite cardinality (cf.[4, p.9]) to the matroids of arbitrary cardinality.

Definition 3 Two matroids $M_i = (E_i, \mathcal{F}_i)$, where E_i is of arbitrary cardinality and $\mathcal{F}_i$ is the system of closed sets of $M_i, (i = 1, 2)$, are *isomorphic* if there is a bijection $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ satisfying $A \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \phi(A) \in \mathcal{F}_2$. We write $M_1 \simeq M_2$ if M_1 and M_2 are isomorphic.

In this paper, we always suppose that $M = (E, \mathcal{F})$ is a matroid of rank $m < \infty$ with $\mathcal{F}$ as its closed sets.

2 The Lattice of closed sets of a matroid

We can associate with $M = (E, \mathcal{F})$ a poset $G(M)$ whose elements are the closed sets of M ordered by inclusion. In this section, we will investigate the properties of $G(M)$.

Lemma 3 $G(M) = (\mathcal{F}, \subseteq)$ is a complete semimodular lattice with finite length.

Proof Obviously $G(M)$ is a poset. At the same time, by (F2) in definition 1 and lemma 1(2), one obtains $F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2$ and $F_1 \vee F_2 = \sigma_M(F_1 \cup F_2)$ for $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ easily. Thus by lemma 1(1) and lemma 2(3), we conclude that $G(M)$ is a complete lattice. It is easy to see that $h(A) = \rho(A)$ for $\forall A \in \mathcal{F}$ according to lemma 1, especially $h(E) = \rho(E) = m$. This induces that $G(M)$ has a length $m < \infty$.

Furthermore, from lemma 1(5) and lemma 2(2), it follows that the poset $G(M)$ is a complete semimodular lattice.

Remark 1 (1) Based on lemma 3 and lemma 2(1), we see that [1,Proposition 2.8] becomes an evident result.

(2) $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ and E are corresponding to the minimum element 0 and the maximum element I of $G(M)$, respectively.

We need the following lemmata to discuss the properties of $G(M)$ to go a step further.

Lemma 4 (i) In $G(M)$, if $F = \bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \in \mathcal{F}$, then there exists a finite subset $\{F_1, ..., F_t\}$ of $\{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ satisfying $F = \bigvee_{j=1}^{t} F_j$.

(ii) Every element in $G(M)$ is compact and $G(M)$ is algebraic.

Proof $F = \bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ implies $F_\alpha \subseteq F$ for $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. If there is one $\alpha \in \mathcal{A}$ satisfying $F = F_\alpha$, then the result is evidently true. Thus, in what follows, suppose $F_\alpha \subset F$ for $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. We proceed by induction on $k = h(F)$.

Suppose the assertion is true for some $n \geq 2$, and $k = n + 1$. Let $F_1, F_2 \in \{F_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$.

If $F_1 \vee F_2 = F$, then the assertion is proved.

Thus assume $F_1 \vee F_2 \neq F$. Since $F_1 \vee F_2 < \vee F_\alpha = F$, one obtains that there exists at least one $F_3 \in \{F_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\} \backslash \{F_1, F_2\}$ satisfying $F_1 \vee F_2 \vee F_3 \neq F_1 \vee F_2$, otherwise $\vee F_\alpha = F_1 \vee F_2 \neq F$, a contradiction. By definition 2, it follows $h(F_1) < h(F_1 \vee F_2) < h(F_1 \vee F_2 \vee F_3) < ... < h(F)$. Repeated application of this argument yields $F = F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee ... \vee F_t$ by the finiteness of $h(F) - h(F_1) \leq m$, where $F_j \in \{F_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}, j = 1, 2, ..., t, t \leq h(F) - h(F_1) + 1 < \infty$.

(ii) is straightforward from definition 2, lemma 3 and (i).

Lemma 5 (i) For $\forall F \in \mathcal{F} \backslash 0_{\mathcal{F}}$, there exists s such that $F = \bigvee_{i=1}^{s} A_i$ holds, where each A_i is an atom in $G(M)$, $(i = 1, 2, ..., s)$ and $s < \infty$, $0_{\mathcal{F}} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.

(ii) The set of atoms of $G(M)$ is $\{\sigma(x) \,|\, x \in E \setminus 0_{\mathcal{F}}\}$.

Proof Let $F = \{f_i \in E | i \in \mathcal{I}\} \in \mathcal{F}$. Then by lemma 1, $F = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{f_i\} \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \sigma(0_{\mathcal{F}} \cup f_i)$. However, $0_{\mathcal{F}}, \{f_i\} \subseteq F$ and lemma 1(2) implies $\sigma(0_{\mathcal{F}} \cup f_i) \subseteq \sigma(F) = F$. Thus $F = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \sigma(0_{\mathcal{F}} \cup f_i) = \sigma(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \sigma(0_{\mathcal{F}} \cup f_i))$, and so $F = \bigvee_{i \in I} \sigma(0_{\mathcal{F}} \cup f_i)$ holds in $G(M)$. In view of lemma 4, this result means $F = \bigvee_{i=1}^{s} \sigma(0_{\mathcal{F}} \cup f_i)\,(s < \infty)$ for certain $f_1, ..., f_s \in F$.

If $f_i \in 0_{\mathcal{F}}$ holds for every $i \in \{1, ..., s\}$, then $F = 0_{\mathcal{F}}$, a contradiction. Besides, $0_{\mathcal{F}} \prec \sigma(0_{\mathcal{F}} \cup f_i)$ holds in $G(M)$ when $f_i \notin 0_{\mathcal{F}}$ according to lemma 1(4) and lemma 3. Therefore, we assume $\sigma(0_{\mathcal{F}} \cup f_i) \neq 0_{\mathcal{F}}$ $(i = 1, ..., s)$. In addition, $0_{\mathcal{F}} \prec \sigma(0_{\mathcal{F}} \cup f_i)$ means that $\sigma(0_{\mathcal{F}} \cup f_i)$ is an atom in $G(M)$. That is to say, the required (i) follows.

$0_{\mathcal{F}} \subset \sigma(x) \subseteq \sigma(0_{\mathcal{F}} \cup x)$ and $0_{\mathcal{F}} \prec \sigma(0_{\mathcal{F}} \cup x)$ for $x \in E \setminus 0_{\mathcal{F}}$ taken together gives (ii).

Theorem 1 $G(M)$ is a geometric lattice with finite length.

Proof This is now straightforward from lemma 3, lemma 4, lemma 5 and definition 2.

Lemma 6 Let $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ with $F_1 \subset F_2$ and $x \in F_2 \setminus F_1$. Then $\sigma(F_1 \cup x) = \sigma(F_1 \cup \sigma(x))$ and $\sigma(x) \nleq F_1$.

Proof By lemma 1(2), $\sigma(F_1 \cup x) \subseteq \sigma(F_1 \cup \sigma(x))$. On the other hand, $F_1, \{x\} \subseteq F_1 \cup x$ yields $F_1, \sigma(x) \subseteq \sigma(F_1 \cup x)$, and further $\sigma(F_1 \cup \sigma(x)) \subseteq \sigma(\sigma(F_1 \cup x)) = \sigma(F_1 \cup x)$. The above two hands taken together presents $\sigma(F_1 \cup x) = \sigma(F_1 \cup \sigma(x))$.

$\sigma(x) \nleq F_1$ is evidently obtained.

3 Geometric lattices and simple matroids

From the results of the previous section, we know that $G(M)$, the lattice of closed sets of a matroid, is geometric. The main result of this section is the converse.

Theorem 2 A lattice L is isomorphic to the lattice of closed sets of a matroid if and only if it is geometric with finite length.

Proof We have shown in the last section that $G(M)$ is geometric with finite length, so let G be a finite length geometric lattice with A as its set of atoms. Consider the collection $\mathcal{F}$ of subsets of A defined by:

$F \in \mathcal{F}$ iff $\exists g \in G$ satisfying $F = \{a \in A \mid a \leq g\}$.

Obviously, the maximum element I of G exists and $I = \bigvee_{a \in A} a$, i.e. $A \in \mathcal{F}$. In other words, (F1) in definition 1 holds.

Let $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

Then one gets $\bigvee_{x \in F_1 \cap F_2} x \leq \vee F_1 = \bigvee_{f \in F_1} f$, and so $\bigvee_{x \in F_1 \cap F_2} x \leq (\vee F_1) \wedge (\vee F_2)$.

If $\bigvee_{x \in F_1 \cap F_2} x < (\vee F_1) \wedge (\vee F_2)$, this implies that $\exists y \in A \setminus (F_1 \cap F_2)$ suits for $y \leq (\vee F_1) \wedge (\vee F_2)$, and so $(\bigvee_{x \in F_1 \cap F_2} x) \vee y \leq (\vee F_1) \wedge (\vee F_2)$. But $y \leq (\vee F_1) \wedge (\vee F_2) \leq \vee F_1, \vee F_2$ tells us $y \in F_1, F_2$, whence, $y \in F_1 \cap F_2$, a contradiction. That is to say, $\bigvee_{x \in F_1 \cap F_2} x = (\vee F_1) \wedge (\vee F_2)$ and $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

Thus (F2) holds.

Since $F_0 \cup \{x_i\} = F_0 \cup x_i$ is right here for $F_0 \in \mathcal{F}$ and $x_1, x_2 \in A \setminus F_0$, for simplicity, we only use $F_0 \cup x_i$ for $F_0 \cup \{x_i\}$ $(i = 1, 2)$.

Let $F_1 = \{a \in A \,|\, a \leq \vee(F_0 \cup x_1)\}$ and $F_2 = \{b \in A \,|\, b \leq \vee(F_0 \cup x_2)\}$. Then $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Further, we observe easily that $\{F \in \mathcal{F} | \, F_0 \cup x_1 \subseteq F\} = \{F \in \mathcal{F} | \, F_0 \cup x_2 \subseteq F\}$ iff $F_1 = F_2$.

Suppose $\{F \in \mathcal{F} | \, F_0 \cup x_1 \subseteq F\} \neq \{F \in \mathcal{F} | \, F_0 \cup x_2 \subseteq F\}$. One obtains $(\vee(F_0 \cup x_1)) \wedge (\vee(F_0 \cup x_2)) = \vee F_0$ because both $\vee(F_0 \cup x_1)$ and $\vee(F_0 \cup x_2)$ cover $\vee F_0$ according to lemma 2(4), i.e. $(\vee F_1) \wedge (\vee F_2) = \vee F_0$. By the proof of (F2) above, we get $(\vee F_1) \wedge (\vee F_2) = \bigvee_{x \in F_1 \cap F_2} x$. Hence $\vee(F_1 \cap F_2) = \vee F_0$.

Evidently $F_0 \subseteq F_1 \cap F_2$. If $F_0 \neq F_1 \cap F_2$, i.e. $\exists x \in (F_1 \cap F_2) \setminus F_0 \neq \emptyset$, then by lemma 2(4) and $F_0 \in \mathcal{F}$, it follows that $(\vee F_0) \vee x$ covers $\vee F_0$, a contradiction to $\vee F_0 = \vee(F_1 \cap F_2)$. Hence $F_0 = F_1 \cap F_2$. Therefore, (F3) in definition 1 holds.

The correctness of (F4) for $(A, \mathcal{F})$ is easily gained by the finite length of G and the definition of $\mathcal{F}$.

Summing up the above, the required follows. Denote the matroid induced by G by $M(G)$.

Now writing $A = \{a_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$, consider the lattice $G(M(G))$ of closed sets of $M(G)$. If $M(G)$ has closure operator σ, it is easy to see that the map $\psi : G \to G(M(G))$ defined for any element $X \in G$, by $\psi(X) = \sigma(\{a_i \in A \,|\, i \in \mathcal{I}\})$, where $\{a_i \in A \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ is the set of atoms below X, is a lattice isomorphism and hence G may be interpreted as the lattice of closed sets of $M(G)$.

Next we will prove that $M(G)$ is simple.

Lemma 7 Let G be a geometric lattice with finite length. Then $M(G)$is simple.

Proof By the definition of $\mathcal{F}$ in the proof of theorem 2, it is obvious that any subset $B \subseteq A$ with $|B| \leq 1$ lies in $\mathcal{F}$. Thus $M(G)$ is simple.

The importance of simple matroids lies in the following theorem.

Theorem 3 The correspondence between a finite length geometric lattice G and the matroid $M(G)$ on the set of atoms of G defines a bijection between the category of finite length geometric lattices and the category of simple matroids.

Proof By lemma 7, $M(G)$ is simple and clearly $G(M(G))$ is canonically isomorphic to G. Conversely, if G is the geometric lattice $G(M)$ for a simple matroid M, then $M(G(M)) \simeq M$.

It is also useful to "translate" some of the results about geometric lattices to a matroid framework. For example, a lattice is relatively complemented, means in matroid language that given any closed sets $A \subseteq B$ of the matroid M and any closed set $X, A \subseteq X \subseteq B$, there exists a flat Y of M such that $X \cap Y = A, \sigma(X \cup Y) = B$. A geometric lattice is relatively complemented is proved by a purely lattice-theoretic method [2,p.88]. We sketch a set-theoretic matroid proof.

Lemma 8 Any interval of a geometric lattice with finite length is geometric.

Proof By theorem 3, in matroid language this says that given $A, B \in \mathcal{F}$ of the simple matroid $M = (E, \mathcal{F})$, $[A, B] = \{X \in \mathcal{F} \mid A \subseteq X \subseteq B\}$ is still isomorphic to the lattice of flats of a simple matroid.

Let $E_{AB} = \{X \in \mathcal{F} \mid X \text{ covers } A \text{ in } (E, \mathcal{F}) \text{ and } X \subseteq B\}$,

$$\mathcal{F}_{AB} = \{Y \subseteq E_{AB} \mid \bigcup_{X \in Y} \bigcup_{x \in X} x \in [A, B]\}$$

and σ_M the closure operator of M.

By lemma 1(4), we see that $X \subseteq B$ covers A in $(E, \mathcal{F})$ if and only if $\exists x \in B \setminus A, X = \sigma_M(A \cup x)$. Therefore $E_{AB} = \{\sigma_M(A \cup x) \mid x \in B \setminus A\}$.

From lemma 6, one has $X = \bigcup_{x \in X \setminus A} \sigma_M(A \cup x)$ for $\forall X \in [A, B]$, especially $B = \bigcup_{x \in B \setminus A} \sigma_M(A \cup x)$. Hence $E_{AB} \in \mathcal{F}_{AB}$, thus, (F1) in definition 1 is true for $(E_{AB}, \mathcal{F}_{AB})$.

We give two preliminary results that will be useful in the following proof.

Result (1): According to the definition of $\mathcal{F}_{AB}$ and the above, one obtains

$F = \{\sigma_M(A \cup x_\alpha) \mid x_\alpha \in B \setminus A, \alpha \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{F}_{AB} \Leftrightarrow C = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}} \bigcup_{x \in \sigma_M(A \cup x_\alpha)} x \in [A, B]$.

Result (2): For $C \in [A, B]$ and $x \in B \setminus A$, we will prove $\sigma_M(C \cup x) = \sigma_M(C \cup \sigma_M(A \cup x))$. Since $C, A \cup x \subseteq C \cup A \cup x = C \cup x$, by lemma 1(2), one has $C, \sigma_M(A \cup x) \subseteq \sigma_M(C \cup x)$, and further, $\sigma_M(C \cup \sigma_M(A \cup x)) \subseteq \sigma_M(C \cup x)$. The converse inclusion is obvious.

Next we continue our proof.

Let $F_1 = \{\sigma_M(A \cup x_\alpha) \mid x_\alpha \in B \setminus A, \alpha \in \mathcal{A}\}$, $F_2 = \{\sigma_M(A \cup y_i) \mid y_i \in B \setminus A, i \in \mathcal{I}\} \in \mathcal{F}_{AB}$. Then $C_1 = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \sigma_M(A \cup x_\alpha)$, $C_2 = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \sigma_M(A \cup y_i) \in [A, B]$, and further $C_1 \cap C_2 \in [A, B]$. However, $F_1 \cap F_2 = \{\sigma_M(A \cup z) \mid \exists \alpha \in \mathcal{A}, i \in \mathcal{I} : z = x_\alpha = y_i\}$ and $C_1 \cap C_2 = \cup \sigma_M(A \cup d)$ where $d \in \{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \cap \{y_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Hence, $\{\sigma_M(A \cup d) \mid d \in \{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \cap \{y_i \mid i \in \mathcal{I}\}\} = F_1 \cap F_2$. Furthermore, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{AB}$. That is to say, (F2) holds.

Assume $F_0 \in \mathcal{F}_{AB}, X_1, X_2 \in E_{AB} \setminus F_0$, i.e.

$F_0 = \{\sigma_M(A \cup x_\gamma) \mid x_\gamma \in B \setminus A, \gamma \in \mathcal{R}\}, X_j = \sigma_M(A \cup x_j), x_j \in B \setminus A, (j = 1, 2)$.

We see that

$F' \in \{F \in \mathcal{F}_{AB} \mid F_0 \cup \{X_j\} \subseteq F\}$ iff $C' = \bigcup_{T \in F'} T \in \{C \in [A, B] \mid C_0 \cup \sigma_M(A \cup x_j) \subseteq C\}$

according to the Result (2), where $C_0 = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{R}} \sigma_M(A \cup x_\gamma)$ and $\sigma_M(A \cup x_\gamma) \in$

$F_0\,(\forall\gamma \in \mathcal{R})$.

That is to say, $\{F \in \mathcal{F}_{AB} \mid F_0 \cup \{X_1\} \subseteq F\} = \{F \in \mathcal{F}_{AB} \mid F_0 \cup \{X_2\} \subseteq F\}$ iff $\{C \in [A,B] \mid C_0 \cup \sigma_M(A \cup x_1) \subseteq C\} = \{C \in [A,B] \mid C_0 \cup \sigma_M(A \cup x_2) \subseteq C\}$.

On the other hand, it is easy to see that
$C_0 \cup \sigma_M(A \cup x_i) \subseteq C \in [A,B]$ iff $\sigma_M(C_0 \cup \sigma_M(A \cup x_i)) \subseteq C \in [A,B], (i = 1,2)$.

Considering with the above discussion, we have

$$C_0 \cup \sigma_M(A \cup x_j) \subseteq C \in [A,B] \text{ iff } \sigma_M(C_0 \cup x_j) \subseteq C \in [A,B], (j = 1,2).$$

Therefore, $\{C \in [A,B] \mid C_0 \cup \sigma_M(A \cup x_1) \subseteq C\} = \{C \in [A,B] \mid C_0 \cup \sigma_M(A \cup x_2) \subseteq C\}$ if and only if $\sigma_M(C_0 \cup x_1) = \sigma_M(C_0 \cup x_2)$.

In addition, $X_j \in E_{AB} \setminus F_0$ presents $x_j \in B \setminus C_0, (j = 1,2)$. Thus by lemma 1(2), one has either $\sigma_M(C_0 \cup x_1) = \sigma_M(C_0 \cup x_2)$ or $\sigma_M(C_0 \cup x_1) \cap \sigma_M(C_0 \cup x_2) = \sigma_M(C_0) = C_0$.

Put $C_j = \sigma_M(C_0 \cup x_j), (j = 1,2)$. Then $C_j \in [A,B], (j = 1,2)$ i.e. $C_1 = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \sigma_M(A \cup z_\beta), C_2 = \bigcup_{\omega \in \mathcal{W}} \sigma_M(A \cup t_\omega)$, where $z_\beta, t_\omega \in B \setminus A$ for $\beta \in \mathcal{B}, \omega \in \mathcal{W}$.

Let $F_1 = \{\sigma_M(A \cup z_\beta) \mid z_\beta \in B \setminus A, \beta \in \mathcal{B}\}, F_2 = \{\sigma_M(A \cup t_\omega) \mid t_\omega \in B \setminus A, \omega \in \mathcal{W}\}$. Then $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{AB}$. Similar to the proof for (F2), we have

$$\sigma_M(C_0 \cup x_1) \cap \sigma_M(C_0 \cup x_2) = C_0 \text{ iff } F_1 \cap F_2 = F_0.$$

Summarizing the above, (F3) is correct for $(E_{AB}, \mathcal{F}_{AB})$.

Since $\rho_M(B) \leq \rho_M(E) < \infty$, it is obviously to gain the truth of (F4) for $(E_{AB}, \mathcal{F}_{AB})$.

In other words, $(E_{AB}, \mathcal{F}_{AB})$ is a matroid. Obviously, it is a simple one. According to Result (1) and theorem 3, we can simply say that $[A,B]$ is a simple matroid.

Theorem 4 A geometric lattice with finite length is relatively complemented.

Proof By lemma 8 it is sufficient to show that a geometric lattice with finite length is complemented.

Consider X, a closed set in the simple matroid M determined by the geometric lattice G. Let $y_1 \notin X$ and $X_1 = \sigma(X \cup y_1)$. Then X_1 covers X. Let $y_2 \in E \setminus X_1$ and take $X_2 = \sigma(X_1 \cup y_2)$. Then X_2 covers X_1. Continuing in this way, by the finiteness of rank of M, we arrive at a set X_t covering X_{t-1} such that $X_t = E$, where $X_t = \sigma(X_{t-1} \cup y_t)$.

Consider the set $Y = \sigma(\{y_1, y_2, ..., y_t\})$.
Obviously, $\sigma(X \cup Y) = \sigma(X \cup \sigma(\{y_1, y_2, ..., y_t\})) = \sigma(X \cup \sigma(y_1 \cup \{y_2, ..., y_t\})) = \sigma(X \cup y_1 \cup \sigma(\{y_2, ..., y_t\})) = \sigma(X_1 \cup \sigma(\{y_2, ..., y_t\})) = \cdots = \sigma(X_{t-1} \cup y_t) = E$.
Since $\mathcal{F} \ni (X \cap Y) \subseteq X$ and $y_1 \in E \setminus X$, one has $y_1 \in E \setminus (X \cap Y)$ and so $\sigma((X \cap Y) \cup y_1)$ covers $X \cap Y$. Because of $y_2 \in E \setminus X_1 \subseteq E \setminus \sigma((X \cap Y) \cup y_1)$ where $X_1 = \sigma(X \cup y_1)$, one concludes that $\sigma(\sigma((X \cap Y) \cup y_1) \cup y_2) = \sigma((X \cap Y) \cup y_1 \cup y_2)$ covers $\sigma((X \cap Y) \cup y_1)$.

Repeated application of this augmentation yields

$\sigma((X \cap Y) \cup y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_t) = Y.$

Thus $(X \cap Y) \subset \sigma((X \cap Y) \cup y_1) \subset \sigma((X \cap Y) \cup y_1 \cup y_2) \subset \cdots \subset \sigma((X \cap Y) \cup y_1 \cup \ldots \cup y_t) = Y$

is a maximal chain between $X \cap Y$ and Y, and so $\rho(Y) - \rho(X \cap Y) = t$. However $\rho(Y) = t$. Namely $\rho(Y) - \rho(X \cap Y) = \rho(Y)$.

Hence $\rho(X \cap Y) = 0$, say $X \cap Y = \emptyset$ according to the simplicity of M. Therefore Y is a required complement of X.

References

[1] D. Betten and W. Wenzel, On linear spaces and matroids of arbitrary cardinality, *Algebra Universalis* **49** (2003), 259–288.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory, 3rd. ed.*, (American Mathematical Society, 1967)

[3] G. Grätzer, *General Lattice Theory, 2nd. ed.*, (Birkhäuser Verlag, 1998)

[4] D.J.A. Welsh, *Matroid Theory*, (Academic Press Inc., 1976)

[5] N. White, *Theory of Matroids*, (Cambridge University Press, 1986)

La $\{-k\}$-autodualité des sommes lexicographiques finies de tournois suivant un 3-cycle ou un tournoi critique

October 29, 2004

Houcine Bouchaala[(a)] Youssef Boudabbous[(b)]

(a) Département de la préparation Mathématiques-Physique, Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Sfax, Université de Sfax, BP 805, 3000 Sfax, Tunisie. Tél: 00.216.74.24.14.03 E-mail: Houcine.Bouchaala@ipeis.rnu.tn

(b) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Sfax, Université de Sfax, BP 802, 3018 Sfax, Tunisie. Tél: 00.216.74.27.49.23
E-mail: Youssef_Boudabbous@Yahoo.fr

Abstract. Let $T = (V, A)$ be a finite tournament with $n \geq 2$ vertices. The dual of T is the tournament $T^* = (V, A^*)$ defined by: for all $x, y \in V$, $(x, y) \in A^*$ if and only if $(y, x) \in A$. The tournament T is critical if T is indecomposable and if for all $x \in V$, the subtournament $T(V - \{x\})$ is decomposable. A 3-cycle is a tournament isomorphic to the tournament $T_1 = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\})$. Let F be a set of non negative integers $k < n$. The tournament T is F-selfdual if for every subset X of V such that $|X| \in F$, the subtournaments $T(X)$ and $T^*(X)$ are isomorphic.

In this paper, we study, for each integer $k \geq 1$, the $\{n-k\}$-selfduality of the tournaments, with $n \geq 4 + k$ vertices, that are lexicographical sums of tournaments under a 3-cycle or a critical tournament. As application, we determine for each integer $k \geq 1$, the tournaments, with $n \geq 4 + k$ vertices, that are $\{4, n-k\}$-selfdual.

Mathematics Subject Classifications (1991): 05C20, 05C60.

Keywords: Tournois, tournois critiques, sommes lexicographiques, isomorphie et autodualité.

1 Préliminaires et présentation des résultats

1.1 Préliminaires

Un *tournoi fini* T est un couple (S, A), où S est un ensemble fini, appelé ensemble des *sommets* de T, et A est un ensemble de couples de sommets distincts de T, appelé ensemble des *arcs* de T, vérifiant: pour tous $x, y \in S$, avec $x \neq y$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. L'ordre de T est le cardinal de S. Par commodité, pour tous $x \neq y \in S$, $x \longrightarrow y$ signifie $(x, y) \in A$. Pour tout $x \in S$ et pour tout $Y \subseteq S$, $x \longrightarrow Y$ (resp. $Y \longrightarrow x$) signifie $x \longrightarrow y$ (resp. $y \longrightarrow x$) pour tout $y \in Y$.

Dans cet article, un tournoi désigne un tournoi fini et le cardinal d'un ensemble fini E sera noté par $|E|$.

Étant donnés deux tournois $T = (S, A)$ et $T' = (S', A')$, une bijection f de S sur S' est un *isomorphisme* de T sur T' si pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que T et T' sont *isomorphes* et on note $T \simeq T'$. Un *automorphisme* de T est un isomorphisme de T sur lui même.

Un tournoi $T = (S, A)$ est un *ordre total* lorsque pour tous $x, y, z \in S$, si $(x, y), (y, z) \in A$, alors $(x, z) \in A$. Dans ce cas, si $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (où $n \geq 2$) et si pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $(a_i, a_{i+1}) \in A$, alors on note $T = (a_1 < \ldots < a_n)$. Par exemple, l'ordre total usuel sur $\{1, \ldots, n\}$ (où $n \geq 2$) est $\mathcal{O}_n = (1 < \ldots < n)$. Un *presque-ordre total* est un tournoi isomorphe au tournoi obtenu à partir d'un certain $\mathcal{O}_n$ (où $n \geq 3$) en remplaçant l'arc $(1, n)$ par l'arc $(n, 1)$. Un presque-ordre total à 3 sommets est un 3-*cycle*. On note T_1, le 3-cycle sur $\{0, 1, 2\}$ tel que $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 0$.

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, à chaque partie X de S est associé le *sous-tournoi* $T(X)$ de T *induit* par X défini par $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$. Par commodité, si $X \subseteq S$ (resp. $x \in S$), alors le sous-tournoi $T(S - X)$ (resp. $T(S - \{x\})$) est noté $T - X$ (resp. $T - x$). Pour tout $x \in S$, on dit que $T - x$ est le tournoi obtenu par la suppression du sommet x de T.

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, une partie X de S est un *intervalle* [7] (ou un *clan* [6] ou un ensemble *homogène* [9]) de T si pour tout $x \in S - X$, $x \longrightarrow X$ ou bien $X \longrightarrow x$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ où $x \in S$, et S sont des intervalles de T, appelés les intervalles *triviaux* de T. Un tournoi est *indécomposable* [7] (ou *primitif* [6]) si tous ses intervalles sont triviaux et il est *décomposable* dans le cas contraire. Un tournoi indécomposable T est *critique* [17], si pour tout sommet x de T, le tournoi $T - x$ est décomposable.

Afin de rappeler la caractérisation suivante des tournois critiques, due à J. H. Schmerl et W. T. Trotter [17], nous définissons, pour tout entier $h \geq 2$, les tournois T_h, U_h et V_h sur $\{0, \ldots, 2h\}$ comme suit.

- $T_h(\{0, \ldots, h\}) = (0 < \ldots < h)$, $T_h(\{h+1, \ldots, 2h\}) = (h+1 < \ldots < 2h)$ et pout tout $i \in \{0, \ldots, h-1\}$, $\{i+1, \ldots, h\} \longrightarrow i+h+1 \longrightarrow \{0, \ldots, i\}$.

- $U_h(\{0,\ldots,h\}) = (0 < \ldots < h)$, $U_h(\{h+1,\ldots,2h\}) = (2h < \ldots < h+1)$ et pout tout $i \in \{0,\ldots,h-1\}$, $\{i+1,\ldots,h\} \to i+h+1 \to \{0,\ldots,i\}$.

- $V_h(\{0,\ldots,2h-1\}) = (0 < \ldots < 2h-1)$ et $\{1,3,\ldots,2h-1\} \to 2h \to \{0,2,\ldots,2h-2\}$.

Proposition 1 (J. H. Schmerl et W. T. Trotter [17]) *À l'isomorphisme près, les seuls tournois critiques à au moins* 5 *sommets sont les tournois* T_h, U_h *et* V_h *où* $h \geq 2$.

Étant donné un tournoi $H = (\{1,\ldots,n\},A)$ (où $n \geq 1$), associons à chaque sommet i de H, un tournoi $R_i = (S_i, A_i)$ de telle sorte que les ensembles S_i soient mutuellement disjoints. La *somme lexicographique* des tournois R_i suivant H est le tournoi noté $H(R_1,\ldots,R_n)$ et défini sur la réunion des S_i comme suit: étant donnés $u \in S_i$ et $v \in S_j$, où $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, (u,v) est un arc de $H(R_1,\ldots,R_n)$ lorsque ou bien $i = j$ et $(u,v) \in A_i$ ou bien $i \neq j$ et $(i,j) \in A$. Nous dirons aussi que le tournoi $H(R_1,\ldots,R_n)$ est obtenu à partir du tournoi H en *dilatant* chaque sommet i de H, par le tournoi R_i. Dans le cas particulier où tous les tournois R_i sont isomorphes à un même tournoi τ, le tournoi $H(R_1,\ldots,R_n)$ est dit le *produit lexicographique* de H par τ. Par exemple, tout tournoi obtenu à partir du tournoi T_1 en dilatant l'un de ses sommets par un ordre total est un presque-ordre total.

Un tournoi T à au moins 2 sommets est $\{-1\}$-*monomorphe*, s'il existe un tournoi R tel que pour tout sommet x de T, $T - x \simeq R$. Par exemple, pour tout entier $h \geq 1$, on vérifie que le tournoi T_h, le produit lexicographique du tournoi T_h par un ordre total à au moins 2 sommets et le produit lexicographique du tournoi T_h par un tournoi $\{-1\}$-monomorphe à au moins 3 sommets, sont des tournois $\{-1\}$-monomorphes.

Un tournoi $T = (S,A)$ est *fortement connexe* si pour tous $x \neq y \in S$, ils existent $x_0,\ldots,x_n \in S$ (où $n \geq 1$) tels que $x_0 = x$, $x_n = y$ et pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, $x_i \to x_{i+1}$.

Rappelons la décomposition de T. Gallai [9] pour les tournois.

Proposition 2 (T. Gallai [9]) *Soit* T *un tournoi à au moins* 3 *sommets.*

(1) *Le tournoi* T *est fortement connexe si et seulement si* T *est une somme lexicographique de tournois suivant un tournoi indécomposable* H *à au moins* 3 *sommets. (Le tournoi* H *est unique à l'isomorphisme près, il est appelé le squelette de* T*).*

(2) *Le tournoi* T *est non fortement connexe si et seulement si* T *est une somme lexicographique de tournois suivant un ordre total à au moins* 2 *sommets.*

À tout tournoi $T = (S,A)$ est associé son tournoi *dual* $T^* = (S,A^*)$ défini par: pour tous $x \neq y \in S$, $(x,y) \in A^*$ si et seulement si $(y,x) \in A$. Le tournoi T est *autodual* s'il est isomorphe à son dual.

À l'isomorphisme près, ils existent deux tournois autoduaux à 4 sommets: l'ordre total et le presque-ordre total, et ils existent deux tournois non autoduaux à 4 sommets qui sont obtenus à partir d'un ordre total à 2 sommets, en dilatant l'un de ses sommets par un 3-cycle; ces deux tournois sont dits *diamants*.

Soient $T = (S, A)$ un tournoi à au moins 2 sommets et $\mathcal{F}$ une famille d'entiers non nuls tels que pour tout $k \in \mathcal{F}$, $|k|<|S|$. Le tournoi T est *$\mathcal{F}$-autodual* si pour tout $k \in \mathcal{F}$, si $k > 0$ (resp. $k < 0$), alors pour toute partie X de S telle que $|X|= k$ (resp. $|X|= -k$), le sous-tournoi $T(X)$ (resp. $T-X$) est autodual. Un tournoi T d'ordre $n \geq 2$ est *fortement autodual*, si T est autodual et est $\{1,\ldots,n-1\}$-autodual. Par exemple, tout ordre total et tout presque-ordre total, est un tournoi fortement autodual.

Rappelons maintenant, le résultat suivant qui découle d'un résultat dû à G. Lopez [12] sur *le problème de reconstruction au sens de R. Fraïssé* [8].

Proposition 3 *Étant donné un tournoi T à au moins 7 sommets, si T est $\{1,\ldots,6\}$-autodual, alors T est fortement autodual.*

Rappelons ensuite le résultat suivant qui découle d'un résultat fondamental de coloration en combinatoire, dû à M. Pouzet [15].

Proposition 4 *Soit T un tournoi d'ordre $n \geq 3$. Si T est $\{q\}$-autodual où $1 \leq q \leq n-1$, alors pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq min(q, n-q)$, T est $\{p\}$-autodual.*

Des propositions 3 et 4, on déduit que pour tout entier $k \geq 6$ et pour tout tournoi T à au moins $6+k$ sommets, T est $\{-k\}$-autodual si et seulement si T est fortement autodual.

1.2 Présentation des résultats

En 1976, K. B. Reid et C. Thomassen [16] ont caractérisé les tournois fortement autoduaux. Ceci a suggéré l'étude des tournois dont certains sous-tournois sont autoduaux. Par exemple, en 1995, Y. Boudabbous et A. Boussairi [2], ont étudié la $\{-3\}$-autodualité d'une certaine classe de tournois et en 2000, Y. Boudabbous, J. Dammak et P. Ille [3], ont caractérisé les tournois indécomposables dont tous les sous-tournois indécomposables sont autoduaux. Par ailleurs, il est clair que tout tournoi est $\{2,3\}$-autodual et que les tournois $\{4\}$-autoduaux, sont exactement les tournois sans diamants. Ces derniers tournois ont été caractérisés par C. Gnanvo et P. Ille [10] et par G. Lopez et C. Rauzy [13].

Proposition 5 (G. Gnanvo, P. Ille et G. Lopez, C. Rauzy [10, 13]) *Étant donné un tournoi T à au moins 5 sommets, T est sans diamants si et seulement si T est soit un ordre total, soit une somme lexicographique d'ordres totaux suivant un certain T_h où $h \geq 1$.*

En 1995, Y. Boudabbous et A. Boussairi [2] ont prouvé qu'un tournoi non fortement connexe T à au moins 5 sommets est $\{-1\}$-autodual si et seulement si T est un ordre total. Dans ce papier, nous commençons par établir la généralisation suivante de ce résultat.

Proposition 6 *Étant donnés un entier $k \geq 1$ et un tournoi non fortement connexe T à au moins $4+k$ sommets, T est $\{-k\}$-autodual si et seulement si T est un ordre total.*

Ensuite, nous étudions pour tout entier $k \geq 1$, la $\{-k\}$-autodualité des tournois fortement connexes T dont le squelette est soit un 3-cycle, soit un tournoi critique.

Dans un premier temps, nous traitons le cas où le squelette de T est un certain U_h ou V_h où $h \geq 2$. Dans ce cas, comme T a au moins 5 sommets, alors il est clair que pour tout entier $k \geq 2$, si T a au plus $3+k$ sommets, alors T est $\{-k\}$-autodual. Ainsi, nous étudions pour tout entier $k \geq 1$, la $\{-k\}$-autodualité de T en supposant que T a au moins $4+k$ sommets. Nous obtenons.

Théorème 1 *Étant donnés un entier $k \geq 1$ et un entier $h \geq 2$, il n'existe aucun tournoi fortement connexe à au moins $4+k$ sommets, qui est $\{-k\}$-autodual et dont le squelette est l'un des deux tournois U_h et V_h.*

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons au cas où le squelette de T est un certain T_h où $h \geq 1$. Dans ce cas, il est clair que si T a au plus 5 sommets, alors il est autodual. Il s'ensuit que pour tout entier $k \geq 1$, si T a au plus $5+k$ sommets, alors T est $\{-k\}$-autodual. Ainsi, nous étudions pour tout entier $k \geq 1$, la $\{-k\}$-autodualité de T en supposant que T a au moins $6+k$ sommets.

Pour la $\{-1\}$-autodualité, nous établissons le théorème suivant.

Théorème 2 *Soit T un tournoi fortement connexe à au moins 7 sommets, dont le squelette est un certain T_h où $h \geq 1$. Le tournoi T est $\{-1\}$-autodual si et seulement si l'une des huit situations suivantes est vérifiée.*

(*a*) *$h = 1$ et le tournoi T est un presque-ordre total.*

(*b*) *$h \geq 3$ et le tournoi T est isomorphe au tournoi T_h.*

(*c*) *$h \geq 2$ et le tournoi T est le produit lexicographique du tournoi T_h par un ordre total à 2 sommets.*

(*d*) *$h \geq 1$ et le tournoi T est le produit lexicographique du tournoi T_h par un tournoi τ à au moins 3 sommets tel que τ est autodual et {-1}-autodual.*

(*e*) *$h \geq 2$ et le tournoi T est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique du tournoi T_h par un ordre total à 2 sommets.*

(*f*) $h \geq 1$ *et le tournoi* T *est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique du tournoi* T_h *par un tournoi* τ *à au moins* 3 *sommets tel que* τ *est autodual,* {*-1, -2*}*-autodual et* $\{-1\}$*-monomorphe.*

(*g*) $h \geq 3$ *et le tournoi* T *est isomorphe au tournoi obtenu à partir du tournoi* T_h *en dilatant un de ses sommets par un ordre total à* 2 *sommets.*

(*h*) $h = 2$ *et le tournoi* T *est isomorphe au tournoi à* 8 *sommets, obtenu à partir du tournoi* T_2, *en dilatant chacun des sommets* 0, 2 *et* 3 *par un ordre total à* 2 *sommets.*

Pour la $\{-2\}$-autodualité, en nous basant sur le théorème 2, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 7 *Soit* T *un tournoi fortement connexe à au moins* 8 *sommets, dont le squelette est un certain* T_h *où* $h \geq 1$. *Le tournoi* T *est* $\{-2\}$*-autodual si et seulement si l'une des quatre situations suivantes est vérifiée.*

(*a*) $h = 1$ *et le tournoi* T *est un presque-ordre total.*

(*b*) $h \geq 4$ *et le tournoi* T *est isomorphe au tournoi* T_h.

(*c*) $h \geq 2$ *et le tournoi* T *est le produit lexicographique du tournoi* T_h *par un ordre total à* 2 *sommets.*

(*d*) $h \geq 1$ *et le tournoi* T *est le produit lexicographique du tournoi* T_h *par un tournoi* τ *à au moins* 3 *sommets tel que* τ *est autodual,* {*-1, -2*}*-autodual et* $\{-1\}$*-monomorphe.*

Pour la $\{-3\}$-autodualité, en utilisant le théorème 2 et la proposition 7, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 8 *Étant donné un tournoi fortement connexe* T *à au moins* 9 *sommets, dont le squelette est un certain* T_h *où* $h \geq 1$, *le tournoi* T *est* $\{-3\}$*-autodual si et seulement si* T *est un presque-ordre total.*

Du théorème 2 et des propositions 5, 7 et 8, découlent les corollaires 1, 2 et 3 suivants, qui déterminent pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, les tournois $\{4, -k\}$-autoduaux, à au moins $6 + k$ sommets.

Corollaire 1 *Étant donné un tournoi* T *à au moins* 7 *sommets,* T *est* $\{4, -1\}$*-autodual si et seulement si l'une des neuf situations suivantes est vérifiée.*

(*a*) *Le tournoi* T *est un ordre total.*

(*b*) *Le tournoi* T *est un presque-ordre total.*

(c) *Le tournoi T est isomorphe à un certain T_h où $h \geq 3$.*

(d) *Le tournoi T est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 2$, par un ordre total à 2 sommets.*

(e) *Le tournoi T est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 1$, par un ordre total à au moins 3 sommets.*

(f) *Le tournoi T est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 2$, par un ordre total à 2 sommets.*

(g) *Le tournoi T est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 1$, par un ordre total à au moins 3 sommets.*

(h) *Le tournoi T est isomorphe au tournoi obtenu à partir d'un certain T_h où $h \geq 3$, en dilatant un de ses sommets par un ordre total à 2 sommets.*

(i) *Le tournoi T est isomorphe au tournoi à 8 sommets, obtenu à partir du tournoi T_2, en dilatant chacun des sommets 0, 2 et 3 par un ordre total à 2 sommets.*

Corollaire 2 *Étant donné un tournoi T à au moins 8 sommets, T est $\{4, -2\}$-autodual si et seulement si l'une des cinq situations suivantes est vérifiée.*

(a) *Le tournoi T est un ordre total.*

(b) *Le tournoi T est un presque-ordre total.*

(c) *Le tournoi T est isomorphe à un certain T_h où $h \geq 4$.*

(d) *Le tournoi T est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 2$, par un ordre total à 2 sommets.*

(e) *Le tournoi T est le produit lexicographique d'un certain T_h où $h \geq 1$, par un ordre total à au moins 3 sommets.*

Corollaire 3 *Étant donné un tournoi T à au moins 9 sommets, le tournoi T est $\{4, -3\}$-autodual si et seulement si T est soit un ordre total, soit un presque-ordre total.*

À l'aide des corollaires 2 et 3, on retrouve directement la caractérisation suivante des tournois fortement autoduaux due à K. B. Reid et C. Thomassen [16].

Corollaire 4 (K. B. Reid et C. Thomassen [16]) *Un tournoi T à au moins 8 sommets est fortement autodual si et seulement si T est soit un ordre total, soit un presque-ordre total.*

Des résultats précédents découle le corollaire 5 suivant, qui répond en particulier dans le cas des tournois, à la question posée par A. Boussairi [4] qui concerne la caractérisation *des graphes orientés* $\{-4\}$*-autoduaux.*

Corollaire 5 *Étant donnés un entier* $k \geq 4$ *et un tournoi* T *à au moins* $6+k$ *sommets, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le tournoi* T *est* $\{-k\}$*-autodual.*

(b) *Le tournoi* T *est* $\{-4\}$*-autodual.*

(c) *Le tournoi* T *est soit un ordre total, soit un presque-ordre total.*

Notons enfin que pour $k \in \{1, 2, 3\}$, la caractérisation des tournois $\{-k\}$-autoduaux, reste encore un problème ouvert. En particulier, pour $k = 3$, A. Boussairi [5] a donné la conjecture suivante.

Conjecture 1 (A. Boussairi [5]) *Tout tournoi* $\{-3\}$*-autodual d'ordre suffisamment grand est fortement autodual.*

En revanche, Y. Boudabbous et A. Boussairi [2] ont obtenu en 1995, la réponse partielle suivante à la conjecture 1.

Proposition 9 (Y. Boudabbous et A. Boussairi [2]) *Soient un entier* $n \geq 12$ *et* C *la classe des tournois à* n *sommets dont tous les sous-tournois à* $(n-3)$ *sommets sont décomposables. Pour tout* $T \in C$, T *est* $\{-3\}$*-autodual si et seulement si* T *est fortement autodual.*

2 Preuve de la propsition 6

Pour la preuve, nous donnons d'abord la remarque suivante.

Remarque 1 *Soit* T *un tournoi non fortement connexe qui n'est pas un ordre total. De la proposition 2, découle que* $T = O_q(R_1, \ldots, R_q)$ *où* $q \geq 2$, $R_1, \ldots, R_q$ *sont des tournois tels que pour tout* $i \in \{1, \ldots, q-1\}$, R_i *et* R_{i+1} *ne sont pas simultanément des ordres totaux et pour tout* $i \in \{1, \ldots, q\}$, *le tournoi* R_i *est soit un ordre total, soit fortement connexe. On vérifie alors que* T *est autodual si et seulement si pour tout* $i \in \{1, \ldots, q\}$, $R_i \simeq (R_{q+1-i})^\star$.

La preuve de la proposition 6 utilise en outre les deux lemmes suivants, dont le premier découle d'un résultat dû à F. Harary et E. Palmer [11] sur *le problème de reconstruction au sens d'Ulam* [18].

Lemme 1 *Tout tournoi non fortement connexe et* $\{-1\}$*-autodual, à au moins 5 sommets, est autodual.*

Lemme 2 (J. W. Moon [14]) *Tout tournoi T fortement connexe à au moins 4 sommets admet au moins un sommet x tel que $T - x$ est un tournoi fortement connexe.*

Preuve de la proposition 6. La condition suffisante étant évidente, on va montrer la condition nécessaire en distinguant suivant la valeur de l'entier k, les 4 cas suivants.

• Cas 1. Si $k = 1$. (On donne ici une autre preuve que celle donnée dans [2]). Soit T un tournoi non fortement connexe $\{-1\}$-autodual à au moins 5 sommets. Raisonnons par l'absurde et supposons que T n'est pas un ordre total. D'aprés la remarque 1, $T = \mathcal{O}_q(R_1, \ldots, R_q)$ où $q \geq 2$, $R_1, \ldots, R_q$ sont des tournois tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, q-1\}$, R_i et R_{i+1} ne sont pas simultanément des ordres totaux et pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, le tournoi R_i est soit un ordre total, soit fortement connexe. D'aprés le lemme 1, le tournoi T est autodual. De la remarque 1, découle alors que pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, $R_i \simeq (R_{q+1-i})^\star$ et en particulier, $R_1 \simeq (R_q)^\star$. Distinguons les 4 sous-cas suivants.

◇ Si R_1 est un tournoi fortement connexe à au moins 4 sommets. D'aprés le lemme 2, il existe un sommet x de R_1 tel que $R_1 - x$ est fortement connexe. Ainsi, $T - x = \mathcal{O}_q(R_1 - x, R_2, \ldots, R_q)$. D'aprés la remarque 1, l'autodualité de $T - x$ entraîne alors que $(R_1 - x) \simeq (R_q)^\star$; ce qui contredit le fait que $R_1 \simeq (R_q)^\star$.

◇ Si R_1 est un 3-cycle. Soit x un sommet de R_1. En distinguant les deux cas suivant la forte-connexité de R_2, on peut voir que $T - x = \mathcal{O}_p(R'_1, \ldots, R'_p)$ où $p \in \{q-1, q\}$, R'_1 est un ordre total et $R'_p = R_q$. D'aprés la remarque 1, l'autodualité de $T - x$ entraîne que $R'_1 \simeq (R_q)^\star$; ce qui contredit le fait que R_q est un 3-cycle, puisque $R_1 \simeq (R_q)^\star$.

◇ Si R_1 est un ordre total à au moins 2 sommets. Dans ce cas, en considérant un sommet x de R_1, on voit que $T - x = \mathcal{O}_q(R_1 - x, \ldots, R_q)$. D'aprés la remarque 1, l'autodualité de $T - x$ entraîne que $(R_1 - x) \simeq (R_q)^\star$; ce qui contredit le fait que $R_1 \simeq (R_q)^\star$.

◇ Si R_1 admet un seul sommet x. Dans ce cas, R_q admet aussi un seul sommet y et R_2 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets. Ainsi, $T - x = \mathcal{O}_{q-1}(R_2, \ldots, R_q)$. D'aprés la remarque 1, l'autodualité de $T - x$ entraîne que $R_2 \simeq (R_q)^\star$; ce qui est absurde.

• Cas 2. Si $k = 2$. Soit T un tournoi non fortement connexe $\{-2\}$-autodual à au moins 6 sommets. Si pour tout sommet x de T, le tournoi $T - x$ est non fortement connexe, alors d'aprés le cas 1, pour tout sommet x de T, le tournoi $T - x$ est un ordre total, et par suite, T est aussi un ordre total. Supposons donc qu'il existe un sommet x de T tel que $T - x$ est fortement connexe. D'aprés la remarque 1, $T = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ où R_1 et R_2 sont des tournois dont l'un admet x comme seul sommet et l'autre est fortement connexe à au moins 5 sommets. En utilisant le lemme 2, on peut voir qu'il existe un sommet y de T tel que $T - y$

est un tournoi non fortement connexe qui n'est pas un ordre total. D'aprés le cas 1, $T - y$ est donc non $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual.

- Cas 3. Si $k = 3$. On fait un raisonnement analogue à celui du cas 2, en utilisant ce dernier à la place du cas 1.

- Cas 4. Si $k \geq 4$. Soit T un tournoi non fortement connexe $\{-k\}$-autodual à au moins $4 + k$ sommets. D'aprés la proposition 4, T est $\{4\}$-autodual et par suite, T est sans diamants. Comme toute somme lexicographique de tournois suivant un certain T_h (où $h \geq 1$) est un tournoi fortement connexe, alors d'aprés la proposition 5, le tournoi T est un ordre total.

□

3 Preuve du théorème 1

Considérons d'abord la remarque générale suivante.

Remarque 2 *Soient un entier $n \geq 3$ (resp. $n' \geq 3$) et un tournoi $T = H(p_1, \ldots, p_n)$ (resp. $T' = H'(p'_1, \ldots, p'_{n'})$), où H (resp. H') est un tournoi sur $\{1, \ldots, n\}$ (resp. $\{1, \ldots, n'\}$) et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ (resp. $i \in \{1, \ldots, n'\}$), p_i (resp. p'_i) est un tournoi sur un ensemble S_i (resp. S'_i). Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(a) *Si $n = n'$ et s'il existe un isomorphisme φ de H sur H' tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p_i \simeq p'_{\varphi(i)}$, alors $T \simeq T'$.*

(b) *Si T et T' sont isomorphes et si H ou H' est indécomposable, alors $n = n'$ et tout isomorphisme f de T sur T', induit un isomorphisme $\overline{f}$ de H sur H' tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(S_i) = S'_{\overline{f}(i)}$.*

La preuve du théorème 1, utilise en outre, les trois lemmes et la remarque qui suivent.

Lemme 3 *Pour tout entier $h \geq 2$, il existe un seul isomorphisme φ_h de U_h sur $(U_h)^*$. De plus, φ_h est involutif et admet un seul point fixe x_h et x_h est défini par:* $x_h = \begin{cases} \frac{h}{2} & \textit{si } h \textit{ est pair} \\ \frac{3h+1}{2} & \textit{si } h \textit{ est impair} \end{cases}$

Preuve. Il est clair que le seul isomorphisme $(\varphi_h)_1$ (resp. $(\varphi_h)_2$) de l'ordre total $U_h(\{0, \ldots, h\})$ (resp. $U_h(\{h+1, \ldots, 2h\})$ sur son dual, est défini par $(\varphi_h)_1(t) = h - t$ pour tout $t \in \{0, \ldots, h\}$ (resp. $(\varphi_h)_2(t) = 3h + 1 - t$ pour tout $t \in \{h+1, \ldots, 2h\}$). Soit φ_h la permutation de $\{0, \ldots, 2h\}$ définie par

$$\varphi_h(t) = \begin{cases} h-t & \text{si } t \in \{0,\ldots,h\} \\ 3h+1-t & \text{si } t \in \{h+1,\ldots,2h\} \end{cases}$$

On vérifie que φ_h est un isomorphisme de U_h sur $(U_h)^\star$ vérifiant les propriétés de l'énoncé. Reste à montrer l'unicité d'un tel isomorphisme de U_h sur $(U_h)^\star$. Pour cela, considérons la notation suivante.

Pour tout tournoi $T = (S, A)$, on note par $\mathcal{C}(T)$, l'ensemble des sommets x de T vérifiant: il existe une partie X de S telle que $T(X)$ est un 3-cycle et $T(X \cup \{x\})$ est un diamant. Remarquons que d'aprés le lemme 11 de [3], $\mathcal{C}(U_h) = \{h+1,\ldots,2h\}$.

Considérons maintenant un isomorphisme f de U_h sur $(U_h)^\star$. On a $f(\mathcal{C}(U_h)) = \mathcal{C}((U_h)^\star)$. Comme $\mathcal{C}(U_h) = \mathcal{C}((U_h)^\star) = \{h+1,\ldots,2h\}$, alors $f(\{h+1,\ldots,2h\}) = \{h+1,\ldots,2h\}$ et il s'ensuit que $f(\{0,\ldots,h\}) = \{0,\ldots,h\}$. Ainsi, f induit un isomorphisme f_1 (resp. f_2) de $U_h(\{0,\ldots,h\})$ (resp. $U_h(\{h+1,\ldots,2h\})$) sur son dual. Il s'ensuit que $f_1 = (\varphi_h)_1$ et $f_2 = (\varphi_h)_2$ et par suite, $f = \varphi_h$.

□

Lemme 4 *Pour tout entier $h \geq 2$, il existe un seul isomorphisme ψ_h de V_h sur $(V_h)^\star$. De plus, ψ_h est involutif et admet le sommet $y_h = 2h$ comme seul point fixe.*

Preuve. Il est clair que la permutation ψ_h de $\{0,\ldots,2h\}$ définie par: $\psi_h(2h) = 2h$ et pour tout $t \in \{0,\ldots,2h-1\}$, $\psi_h(t) = 2h-1-t$, est un isomorphisme involutif de V_h sur son dual, ayant le sommet $2h$ comme seul point fixe. Reste à montrer l'unicité d'un tel isomorphisme de V_h sur $(V_h)^\star$. Pour cela, considérons un isomorphisme f de V_h sur $(V_h)^\star$. Comme $2h$ est le seul élément de $\{0,\ldots,2h\}$ par lequel passent tous les 3-cycles de V_h et de $(V_h)^\star$, alors $f(2h) = 2h$. Ainsi, f induit un isomorphisme de l'ordre total $V_h(\{0,\ldots,2h-1\})$ sur son dual. Il en découle que $f = \psi_h$.

□

De la remarque 2 et des lemmes 3 et 4, découle le lemme suivant.

Lemme 5 *Soit un tournoi $T = H(p_0,\ldots,p_{2h})$ où $h \geq 2$, $H = U_h$ (resp. $H = V_h$) et pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et soit φ_h (resp. ψ_h) le seul isomorphisme de U_h sur $(U_h)^\star$ (resp. V_h sur $(V_h)^\star$). Le tournoi T est autodual si et seulement si pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $p_i \simeq (p_{\varphi_h(i)})^\star$ (resp. $p_i \simeq (p_{\psi_h(i)})^\star$).*

Remarque 3 (1) *Pour le tournoi U_h (où $h \geq 2$), les assertions suivantes sont vérifiées.*

(a) *$U_2 - \{2,4\} \simeq T_1$ et pour $h \geq 3$, $U_h - \{h, 2h\} \simeq U_{h-1}$.*

(b) *$U_2 - \{0,3\} \simeq T_1$ et pour $h \geq 3$, $U_h - \{0, h+1\} \simeq U_{h-1}$.*

(c) *Pour $h \geq 2$, $U_h - \{h\} = O_2(R_1, R_2)$ où R_1 est le tournoi dont le seul sommet est $2h$ et R_2 est le tournoi fortement connexe $U_h - \{h, 2h\}$.*

(*d*) *Pour* $h \geq 2$*,* $U_h - \{0\} = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ *où* R_2 *est le tournoi dont le seul sommet est* $h+1$ *et* R_1 *est le tournoi fortement connexe* $U_h - \{0, h+1\}$*.*

(2) *Pour le tournoi* V_h *(où* $h \geq 2$*), les assertions suivantes sont vérifiées.*

(*a*) $V_2 - \{2,3\} \simeq T_1$ *et pour* $h \geq 3$*,* $V_h - \{2h-2, 2h-1\} \simeq V_{h-1}$*.*

(*b*) $V_2 - \{0,1\} \simeq T_1$ *et pour* $h \geq 3$*,* $V_h - \{0,1\} \simeq V_{h-1}$*.*

(*c*) *Pour* $h \geq 2$*,* $V_h - \{0\} = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ *où* R_1 *est le tournoi dont le seul sommet est* 1 *et* R_2 *est le tournoi fortement connexe* $V_h - \{0,1\}$*.*

(*d*) *Pour* $h \geq 2$*,* $V_h - \{2h-1\} = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ *où* R_2 *est le tournoi dont le seul sommet est* $2h-2$ *et* R_1 *est le tournoi fortement connexe* $V_h - \{2h-2, 2h-1\}$*.*

Preuve du théorème 1. Pour la preuve, soit un entier $k \geq 1$ et supposons par l'absurde qu'il existe un tournoi $\{-k\}$-autodual à au moins $4+k$ sommets $T = H(p_0, \ldots, p_{2h})$, où $h \geq 2$, $H \in \{U_h, V_h\}$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i. Suivant les valeurs de l'entier k, on distingue les quatre cas suivants.

• Cas 1. Si $k = 1$. Notons d'abord que de la remarque 3 découle que pour tout entier $h \geq 2$ et pour tout $H \in \{U_h, V_h\}$, il existe un sommet i de H tel que $H - i = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ où R_1 est un tournoi à un seul sommet et R_2 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets. D'aprés la remarque 1, $H - i$ est un tournoi non autodual et par suite, H est non $\{-1\}$-autodual. Il s'ensuit que T est décomposable. Notons aussi que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, si $|S_i| \geq 2$, alors pour tout $x \in S_i$, $T - x = H(p'_0, \ldots, p'_{2h})$ où pour tout $t \in \{0, \ldots, 2h\}$,

$$p'_t = \begin{cases} p_t & \text{si } t \neq i \\ p_i - x & \text{si } t = i \end{cases}$$

Soient ρ_h le seul isomorphisme de H sur H^* et z_h le seul point fixe de ρ_h (voir les lemmes 3 et 4). La preuve se fait en 4 étapes.

Étape 1. Pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{z_h\}$, si $|S_i| \geq 2$, alors $|S_{\rho_h(i)}| = |S_i| - 1$. En effet: soit $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{z_h\}$ tel que $|S_i| \geq 2$ et soit $x \in S_i$. D'aprés le lemme 5 et le fait que $\rho_h(i) \neq i$, l'autodualité de $T - x$ entraîne que $p_i - x \simeq (p_{\rho_h(i)})^*$. Il s'ensuit que $|S_{\rho_h(i)}| = |S_i| - 1$.

Étape 2. Pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{z_h\}$, $|S_i| \leq 2$.
En effet: raisonnons par l'absurde et soit $j \in \{0, \ldots, 2h\} - \{z_h\}$ tel que $|S_j| \geq 3$. D'aprés l'étape 1, $|S_{\rho_h(j)}| = |S_j| - 1$. Comme $|S_j| - 1 \geq 2$ et $\rho_h(j) \neq z_h$, alors d'aprés l'étape 1, $|S_{\rho_h(\rho_h(j))}| = |S_{\rho_h(j)}| - 1 = |S_j| - 2$. Comme ρ_h est involutif, alors $|S_j| = |S_j| - 2$; ce qui est absurde.

Étape 3. Le tournoi T admet exactement un seul intervalle non trivial. En effet: raisonnons par l'absurde et soient $j_1 \neq j_2 \in \{0, \ldots, 2h\}$ tels que $\mid S_{j_1} \mid \geq 2$, $\mid S_{j_2} \mid \geq 2$ et $j_1 \neq z_h$. D'aprés l'étape 2, $\mid S_{j_1} \mid = 2$ et par suite, d'aprés l'étape 1, $\mid S_{\rho_h(j_1)} \mid = 1$. Ainsi, $\rho_h(j_1) \neq j_2$. Soit $y \in S_{j_2}$. Comme $j_2 \notin \{j_1, \rho_h(j_1)\}$, alors l'autodualité de $T - y$ entraîne que $p_{j_1} \simeq (p_{\rho_h(j_1)})^\star$. Ainsi, $|S_{j_1}| = |S_{\rho_h(j_1)}|$; ce qui est absurde.

Étape 4. Le tournoi T n'est pas $\{-1\}$-autodual.
En effet: on va montrer qu'il existe un sommet x de T tel que $T - x = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ où R_1 et R_2 sont deux tournois dont l'un a au plus 2 sommets et l'autre est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets (ce qui permet de conclure grâce à la remarque 1).

Pour cela, si $H = U_h$ (resp. $H = V_h$), alors on note: $\alpha_h = h$, $\alpha'_h = 2h$, $\beta_h = 0$ et $\beta'_h = h + 1$ (resp. $\alpha_h = 0$, $\alpha'_h = 1$, $\beta_h = 2h - 1$ et $\beta'_h = 2h - 2$). Remarquons que $z_h \notin \{\alpha_h, \alpha'_h, \beta_h, \beta'_h\}$ et distinguons les deux cas suivants.

◇ Si S_{α_h} est un singleton $\{x\}$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 3, $H - \alpha_h = \mathcal{O}_2(\xi_1, \xi_2)$ où ξ_1 est un tournoi dont le seul sommet est α'_h et ξ_2 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets. Il s'ensuit que $T - x = \mathcal{O}_2(p_{\alpha'_h}, R_2)$ où R_2 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets (R_2 est une somme lexicographique suivant ξ_2). Comme $\alpha'_h \neq z_h$, alors d'aprés l'étape 2, $p_{\alpha'_h}$ a au plus 2 sommets; ce qui permet de conclure.

◇ Si S_{α_h} n'est pas un singleton. Dans ce cas, d'aprés les étapes 2 et 3, $|S_{\alpha_h}| = 2$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{\alpha_h\}$, $|S_i| = 1$. D'aprés la remarque 3, $H - \beta_h = \mathcal{O}_2(\xi_1, \xi_2)$ où ξ_2 est un tournoi dont le seul sommet est β'_h et ξ_1 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets. En posant $S_{\beta_h} = \{x\}$, on en déduit que $T - x = \mathcal{O}_2(R_1, p_{\beta'_h})$ où R_1 est un tournoi fortement connexe à au moins 3 sommets (R_1 est une somme lexicographique suivant ξ_1). On conclut en remarquant que $|S_{\beta'_h}| = 1$.

• <u>Cas 2.</u> Si $k = 2$. Dans ce cas, nous distinguons les deux sous-cas suivants.

◇ Si le tournoi T est indécomposable, alors d'aprés la remarque 3, il existe un sommet x de T tel que $T - x = \mathcal{O}_2(R_1, R_2)$ où R_1 est un tournoi à un seul sommet et R_2 est un tournoi fortement connexe à au moins 4 sommets. Ainsi, $T - x$ est un tournoi à au moins 5 sommets, non fortement connexe et $\{-1\}$-autodual, qui n'est pas un ordre total; ce qui contredit la proposition 6.

◇ Si le tournoi T est décomposable, alors pour $x \in S_i$ où $i \in \{0, \ldots, 2h\}$ et $|S_i| \geq 2$, le tournoi $T - x$ contredit le cas 1.

• <u>Cas 3.</u> Si $k = 3$. On fait un raisonnement analogue à celui du cas 2, en utilisant ce dernier à la place du cas 1.

• <u>Cas 4.</u> Si $k \geq 4$. Dans ce cas, d'aprés la proposition 4, le tournoi T est $\{4\}$-autodual. D'où, T est un tournoi sans diamants et par suite, le tournoi H est sans diamants; ce qui contredit le fait que $U_h(\{0, 1, h+1, 2h\})$ et $V_h(\{0, 1, 2h, 2\})$

sont deux diamants.

4 Preuve du théorème 2

Notations 1 *Dans toute la suite de ce papier, étant donné un tournoi* $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ *où* $h \geq 1$ *et pour tout* $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i *est un tournoi sur un ensemble* S_i, *on note* $\mathcal{Z}(T) = \{i \in \{0, \ldots, 2h\};\ | S_i | \geq 2\}$ *et pour tout entier naturel* k, *on note* $\mathcal{Z}_k(T) = \{i \in \{0, \ldots, 2h\};\ | S_i | = k\}$, $\mathcal{P}_k(T) = \{S_i;\ i \in \mathcal{Z}_k(T)\}$ *et* $n_k(T) = | \mathcal{Z}_k(T) |$. *Si de plus* T *est* $\{-1\}$*-autodual, alors pour tout sommet* x *de* T, *on désigne par* f_x, *un isomorphisme du tournoi* $T - x$ *sur son dual.*

Pour tout entier $h \geq 1$, *l'ensemble des permutations circulaires sur* $\{0, \ldots, 2h\}$ *sera noté* Ω_h, *et l'application identique de* $\{0, \ldots, 2h\}$ *sera notée* π_0.

4.1 L'autodualité d'un tournoi fortement connexe dont le squelette est un certain T_h où $h \geq 1$

Dans cette partie, nous donnons quelques résultats sur l'autodualité d'un tournoi fortement connexe dont le squelette est un certain T_h (où $h \geq 1$), qui seront utiles pour la preuve du théorème 2.

Rappelons d'abord le lemme suivant.

Lemme 6 (C. Gnanvo et P. Ille [10]) *Pour tout entier* $h \geq 1$, *l'ensemble des automorphismes du tournoi* T_h *est égal à* Ω_h.

Établissons maintenant le lemme suivant.

Lemme 7 *Soit un entier* $h \geq 1$. *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(1) *Soit* θ_0 *la permutation de* $\{0, \ldots, 2h\}$ *définie par: pour tout* $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $\theta_0(i) = -i$ *modulo* $2h + 1$.

  (a) *La permutation* θ_0 *est un isomorphisme involutif du tournoi* T_h *sur son dual ayant le sommet* 0 *comme seul point fixe.*

  (b) *L'ensemble des isomorphismes du tournoi* T_h *sur son dual est égal à* $\{\theta_0\ o\ \pi;\ \pi \in \Omega_h\}$.

(2) *Soient* $i_1 \neq i_2 \in \{0, \ldots, 2h\}$ *et* i_0 *l'entier de* $\{0, \ldots, 2h\}$ *défini par:*

$$i_0 = \begin{cases} \frac{i_1+i_2}{2} & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est pair} \\ \frac{i_1+i_2+1}{2} + h & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } i_1 + i_2 \leq 2h - 1 \\ \frac{i_1+i_2-1}{2} - h & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } 2h + 1 \leq i_1 + i_2 \end{cases}$$

Soit $\Phi_{(i_1,i_2)}$ *la permutation de* $\{0, \ldots, 2h\}$ *définie par: pour tout* $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $\Phi_{(i_1,i_2)}(i) = i_1 + i_2 - i$ *modulo* $2h + 1$.

(a) *La permutation $\Phi_{(i_1,i_2)}$ est involutive et est le seul isomorphisme f du tournoi T_h sur son dual vérifiant $f(i_1) = i_2$.*

(b) *L'entier i_0 est le seul point fixe de $\Phi_{(i_1,i_2)}$.*

Preuve. (1) (a) Conséquence directe de la morphologie du tournoi T_h.
(b) Découle de (a) et du lemme 6.

(2) (a) Notons d'abord que la permutation $\Phi_{(i_1,i_2)}$ est clairement involutive. Remarquons ensuite que $\Phi_{(i_1,i_2)} = \theta_0 \circ \pi$ où π est l'élément de Ω_h défini par: pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $\pi(i) = i-(i_1+i_2)$ modulo $2h+1$. Ainsi, d'aprés (1)(b), $\Phi_{(i_1,i_2)}$ est un isomorphisme du tournoi T_h sur son dual vérifiant $\Phi_{(i_1,i_2)}(i_1) = i_2$. Inversement, si f est un isomorphisme du tournoi T_h sur son dual vérifiant $f(i_1) = i_2$, alors d'aprés (1)(b), il existe une permutation $\pi' \in \Omega_h$ telle que $f = \theta_0 \circ \pi'$. D'où, $\pi'(i_1) = -i_2$ modulo $2h+1$ et par suite, $\pi'(i_1) = \pi(i_1)$. Ainsi, $\pi' = \pi$ et $f = \Phi_{(i_1,i_2)}$.

(b) Remarquons d'abord que:

$$i_0 = \begin{cases} i_1 + i_2 - i_0 & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est pair} \\ i_1 + i_2 - i_0 + (2h+1) & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } i_1 + i_2 \leq 2h-1 \\ i_1 + i_2 - i_0 - (2h+1) & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } 2h+1 \leq i_1 + i_2 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\Phi_{(i_1,i_2)}(i_0) = i_0$. Ensuite, supposons par l'absurde qu'ils existent $t_1 \neq t_2 \in \{0,\ldots,2h\}$ tels que $\Phi_{(i_1,i_2)}(t_1) = t_1$ et $\Phi_{(i_1,i_2)}(t_2) = t_2$. On peut supposer que dans T_h, $t_1 \to t_2$. D'où, dans $(T_h)^\star$, $\Phi_{(i_1,i_2)}(t_1) \to \Phi_{(i_1,i_2)}(t_2)$ et par suite, dans $(T_h)^\star$, $t_1 \to t_2$; ce qui est absurde.

□

Du lemme 7 et de la remarque 2 découle le corollaire suivant.

Corollaire 6 *Soient un entier $h \geq 1$, $i_1 \neq i_2 \in \{0,\ldots,2h\}$ et un tournoi $T = T_h(p_0,\ldots,p_{2h})$ où pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i. Si T est autodual et si f est un isomorphisme de T sur $T^\star$ tel que $f(S_{i_1}) = S_{i_2}$, alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

(1) (a) *Pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $f(S_i) = S_{i_1+i_2-i}$ où l'entier $i_1 + i_2 - i$ est considéré modulo $2h+1$.*

(b) *Pour tout $i \in \{0,\ldots,2h\}$, $(f o f)(S_i) = S_i$.*

(2) *Soit i_0 l'entier de $\{0,\ldots,2h\}$ défini par:*

$$i_0 = \begin{cases} \frac{i_1+i_2}{2} & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est pair} \\ \frac{i_1+i_2+1}{2} + h & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } i_1 + i_2 \leq 2h-1 \\ \frac{i_1+i_2-1}{2} - h & \text{si } i_1 + i_2 \text{ est impair et } 2h+1 \leq i_1 + i_2 \end{cases}$$

L'entier i_0 est le seul élément j de $\{0,\ldots,2h\}$ vérifiant $f(S_j) = S_j$.

Nous obtenons maintenant, le corollaire suivant qui caractérise l'autodualité d'un tournoi fortement connexe dont le squelette est un certain T_h où $h \geq 1$.

Corollaire 7 *Soit un tournoi $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i. Le tournoi T est autodual si et seulement s'il existe $i_0 \in \{0, \ldots, 2h\}$ tel que pour tout $j \in \{0, \ldots, h\}$, $p_{i_0+j} \simeq (p_{i_0-j})^*$ où $i_0 + j$ et $i_0 - j$ sont considérés modulo $2h+1$. Lorsqu'un tel i_0 existe, on dit que T est symétrique par rapport à S_{i_0}.*

Preuve. La condition nécessaire découle du corollaire 6.
Pour la condition suffisante, il suffit de remarquer que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $p_i \simeq (p_{2i_0-i})^*$ où $2i_0 - i$ est considéré modulo $2h+1$, puis d'utiliser l'application $\Phi_{(i_0,i_0)}$ donnée par le lemme 7 et d'appliquer la remarque 2.
□

Des deux corollaires 6 et 7, découle la remarque suivante.

Remarque 4 *Soit un tournoi $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et soit $j \in \{0, \ldots, 2h\}$. Le tournoi T est symétrique par rapport à S_j si et seulement s'il existe un isomorphisme f de T sur T^* tel que $f(S_j) = S_j$.*

De la proposition 5 et du corollaire 7 découle la remarque suivante qui caractérise les tournois sans diamants autoduaux et qui ne sont pas des ordres totaux.

Remarque 5 *Soit un tournoi sans diamants $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un ordre total sur un ensemble S_i. Le tournoi T est autodual si et seulement s'il existe $i_0 \in \{0, \ldots, 2h\}$ tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, h\}$, $|S_{i_0-j}| = |S_{i_0+j}|$ où $i_0 - j$ et $i_0 + j$ sont considérés modulo $2h+1$.*

À la fin de cette partie, nous donnons le lemme suivant qui découle directement du corollaire 7.

Lemme 8 *Soit un tournoi $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i. Si T est autodual, alors il est symétrique par rapport à un certain S_{i_0} où $i_0 \in \{0, \ldots, 2h\}$, et l'entier $|S_{i_0}|$ est le seul parmi les entiers naturels k tels que l'entier $n_k(T)$ soit impair.*

4.2 Preuve du théorème 2

Notons d'abord que de la morphologie du tournoi T_h (où $h \geq 1$), découle la remarque suivante.

Remarque 6 *Soit un tournoi $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et soient $k \in \{0, \ldots, 2h\}$ et $x \in S_k$.*

(a) *Si* $|S_k| \geq 2$, *alors* $T - x = T_h(p'_0, \ldots, p'_{2h})$ *où*

$$p'_j = \begin{cases} p_j & si\ j \neq k \\ p_k - x & si\ j = k \end{cases}$$

(b) *Si* $|S_k| = 1$ *et si* $h \geq 2$, *alors* $T - x = T_{h-1}(p'_0, \ldots, p'_{2h-2})$ *où*

$$p'_j = \begin{cases} T(S_{h+k} \cup S_{h+k+1}) & si\ j = 0 \\ p_{h+k+j+1} & si\ 1 \leq j \leq h-1 \\ p_{h+k+j+2} & si\ h \leq j \leq 2h-2 \end{cases}$$

(les indices sont considérés modulo $2h+1$*)*

(c) *Si* $|S_k| = 1$ *et si* $h = 1$, *alors* $T - x = \mathcal{O}_2(p_{k+1}, p_{k+2})$ *où* $k+1$ *et* $k+2$ *sont considérés modulo* 3.

Notons maintenant que si un tournoi T vérifie l'une des situations citées dans le théorème 2, alors, en utilisant le corollaire 7 et la remarque 6, on peut voir que T est $\{-1\}$-autodual.

Ainsi, pour la preuve du théorème 2, on considère un tournoi $\{-1\}$-autodual à $n \geq 7$ sommets: $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et on pose $m = \max(\{|S_i|; i \in \{0, \ldots, 2h\}\})$. Si $m = 1$, alors le tournoi T se trouve dans la situation (b) du théorème 2. Dans la suite, on suppose donc que $m \geq 2$. En discutant suivant les valeurs de m et de h, la preuve du théorème 2 est donnée par les trois propositions suivantes.

Proposition 10 *Si* $h = 1$, *alors* $m \geq 3$ *et le tournoi* T *vérifie l'une des trois situations suivantes.*

(a) *Le tournoi* T *est un presque-ordre total.*

(b) *Le tournoi* T *est le produit lexicographique du tournoi* T_1 *par un tournoi* τ *à* m *sommets tel que* τ *est autodual et {-1}-autodual.*

(c) *Le tournoi* T *est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique du tournoi* T_1 *par un tournoi* τ *à* m *sommets tel que* τ *est autodual, {-1, -2}-autodual et* $\{-1\}$*-monomorphe.*

Proposition 11 *Si* $h \geq 2$ *et si* $m \geq 3$, *alors le tournoi* T *vérifie l'une des deux situations suivantes.*

(a) *Le tournoi* T *est le produit lexicographique du tournoi* T_h *par un tournoi* τ *à* m *sommets tel que* τ *est autodual et {-1}-autodual.*

(b) *Le tournoi* T *est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique du tournoi* T_h *par un tournoi* τ *à* m *sommets tel que* τ *est autodual, {-1, -2}-autodual et* $\{-1\}$*-monomorphe.*

Proposition 12 *Si* $h \geq 2$ *et si* $m = 2$, *alors le tournoi* T *vérifie l'une des quatre situations suivantes.*

(*a*) *Le tournoi T est le produit lexicographique du tournoi T_h par un ordre total à 2 sommets.*

(*b*) *Le tournoi T est obtenu par la suppression d'un sommet d'un tournoi qui est le produit lexicographique du tournoi T_h par un ordre total à 2 sommets.*

(*c*) *$h \geq 3$ et le tournoi T est isomorphe au tournoi obtenu à partir du tournoi T_h en dilatant un de ses sommets par un ordre total à 2 sommets.*

(*d*) *$h = 2$ et le tournoi T est isomorphe au tournoi à 8 sommets, obtenu à partir du tournoi T_2, en dilatant chacun des sommets 0, 2 et 3 par un ordre total à 2 sommets.*

Pour la preuve de ces propositions, rappelons d'abord le lemme 9 (resp. lemme 10) suivant, qui découle d'un résultat sur *le problème de reconstruction au sens d'Ulam* [18], dû à M. Basso-Gerbelli et P. Ille [1] (resp. C. Gnanvo et P. Ille [10]).

Lemme 9 *Soient un entier $p \geq 3$ et un tournoi $R = H(R_1, \ldots, R_p)$ où H est un tournoi indécomposable sur $\{1, \ldots, p\}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, R_i est un tournoi sur un ensemble ξ_i. Si le tournoi R est $\{-1\}$-autodual et s'ils existent $i_1 \neq i_2 \in \{1, \ldots, p\}$ tels que $\min(|\xi_{i_1}|, |\xi_{i_2}|) \geq 2$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, le tournoi R_i est autodual.*

Lemme 10 *Étant donné un tournoi R sans diamants, à au moins 7 sommets, si R est $\{-1\}$-autodual, alors R est autodual.*

Dans un premier temps, nous établissons les deux lemmes suivants.

Lemme 11 *Si $|\mathcal{Z}(T)| = 1$ et si $m \geq 3$, alors T est un presque-ordre total.*

Preuve. Supposons que $|\mathcal{Z}(T)| = 1$ et que $m \geq 3$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\mathcal{Z}(T) = \{0\}$. Il s'ensuit que $|S_0| = m$ et que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $|S_i| = 1$. Posons $S_1 = \{a\}$ et $S_2 = \{b\}$. Il s'agit de montrer que $h = 1$ et que p_0 est un ordre total. Supposons par l'absurde que $h \geq 2$. D'aprés la remarque 6, le tournoi $T - a$ est isomorphe au tournoi, obtenu à partir du tournoi T_{h-1}, en dilatant le sommet 0 par p_0 et le sommet h par un ordre total à 2 sommets. Comme $m \geq 3$, alors $n_m(T - a) = n_m(T) = 1$ et $n_2(T - a) = 1$ et par suite, d'aprés le lemme 8, $T - a$ est donc non autodual; ce qui contredit la $\{-1\}$-autodualité de T. Ainsi, $h = 1$. Comme pour tout $x \in S_0$, $T - x$ est autodual, alors d'aprés le corollaire 7, p_0 est $\{-1\}$-autodual. Si p_0 est fortement connexe, alors d'aprés la remarque 1, le tournoi $T - a$ est non autodual (car $T - a = O_2(p_2, p_0)$); ce qui contredit la $\{-1\}$-autodualité de T. Ainsi, p_0 est un tournoi non fortement connexe $\{-1\}$-autodual à au moins 5 sommets et donc d'aprés la proposition 6, p_0 est un ordre total. Ainsi, T est un presque-ordre total.

□

Lemme 12 *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(1) *Pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, le tournoi p_i est autodual.*

(2) *S'ils existent $j \in \mathcal{Z}(T)$ et $x \in S_j$ tels que $f_x(S_j - \{x\}) = S_j - \{x\}$, alors le tournoi T est symétrique par rapport à S_j.*

(3) *S'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $n_k(T) \neq 0$ et $n_{k-1}(T) = 0$, alors pour tout $j \in \mathcal{Z}_k(T)$, le tournoi p_j est $\{-1\}$-autodual et le tournoi T est symétrique par rapport à S_j.*

Preuve. (1) Si $m \leq 3$, le résultat est trivial et si $m \geq 4$, on conclut par les lemmes 9 et 11.

(2) Étant donnés $j \in \mathcal{Z}(T)$ et $x \in S_j$ tels que $f_x(S_j - \{x\}) = S_j - \{x\}$, en considérant un isomorphisme φ_j de p_j sur son dual, on peut voir que l'application g définie sur $S = \bigcup_{0 \leq i \leq 2h} S_i$ par $g(y) = \begin{cases} f_x(y) & \text{si } y \notin S_j \\ \varphi_j(y) & \text{si } y \in S_j \end{cases}$ est un isomorphisme de T sur $T^\star$ tel que $g(S_j) = S_j$. La remarque 4 permet alors de conclure.

(3) Étant donné un entier $k \geq 2$ tel que $n_k(T) \neq 0$ et $n_{k-1}(T) = 0$, alors pour tout $j \in \mathcal{Z}_k(T)$ et pour tout $x \in S_j$, $S_j - x$ est le seul intervalle maximal de cardinal $k - 1$ de $T - x$ et de $T^\star - x$ et par suite, $f_x(S_j - \{x\}) = S_j - \{x\}$ et on conclut par l'assertion (2).

□

Dans un deuxième temps, nous donnons la définition suivante, inspirée d'une notion donnée par C. Gnanvo et P. Ille [10], puis nous établissons les deux lemmes qui la suivent.

Définition 1 *On dit qu'un entier naturel non nul k est régulièrement réparti dans T, si $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$ et s'il existe un élément π de $\Omega_h - \{\pi_0\}$ tel que $\pi(\mathcal{Z}_k(T)) \subseteq \mathcal{Z}_k(T)$. L'orbite, par rapport à un tel π, d'un certain $i \in \{0, \ldots, 2h\}$ est dite un π-polygone de répartition.*

Lemme 13 *S'ils existent $i_1 \neq i_2 \in \mathcal{Z}(T)$, alors tout entier k tel que $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$ et $k \notin \{|S_{i_1}|, |S_{i_2}|, |S_{i_1}| -1, |S_{i_2}| -1\}$, est régulièrement réparti dans T.*

Preuve. Soient $x \in S_{i_1}$ (resp. $y \in S_{i_2}$) et $\overline{f_x}$ (resp. $\overline{f_y}$) l'isomorphisme du tournoi T_h sur son dual induit par f_x (resp. f_y) (voir la remarque 2). Il est clair que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $f_x(S_i - \{x\}) = S_{\overline{f_x}(i)} - \{x\}$ et $f_y(S_i - \{y\}) = S_{\overline{f_y}(i)} - \{y\}$. Posons $\pi = (\overline{f_y})^{-1} \circ \overline{f_x}$ et montrons d'abord que $\pi \in \Omega_h - \{\pi_0\}$. Il est clair que π est un automorphisme de T_h et par suite d'aprés le lemme 6, $\pi \in \Omega_h$. Il reste à prouver que $\pi \neq \pi_0$. Pour cela, supposons par l'absurde que $\overline{f_x} = \overline{f_y}$. On a donc $f_y(S_{i_1}) = f_y(S_{i_1} - \{y\}) = S_{\overline{f_x}(i_1)} - \{y\}$. D'où, $| S_{i_1} | = | S_{\overline{f_x}(i_1)} - \{y\} |$ et par suite $| S_{\overline{f_x}(i_1)} | \in \{| S_{i_1} |, | S_{i_1} | +1\}$. Or, $f_x(S_{i_1} - \{x\}) = S_{\overline{f_x}(i_1)} - \{x\}$, donc $| S_{i_1} | -1 = | S_{\overline{f_x}(i_1)} - x |$ et par suite $| S_{\overline{f_x}(i_1)} | \in \{| S_{i_1} |, | S_{i_1} | -1\}$. Il s'ensuit que, $| S_{\overline{f_x}(i_1)} | = | S_{i_1} |$ et que $x \in S_{\overline{f_x}(i_1)}$. Or $x \in S_{i_1}$, donc $\overline{f_x}(i_1) = i_1$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient aussi $\overline{f_y}(i_2) = i_2$. Comme $\overline{f_x} = \overline{f_y}$, alors $\overline{f_x}$ est un isomorphisme de T_h sur son dual qui admet au moins deux points fixes distincts; ce qui contredit le lemme 7. Ainsi, $\pi \in \Omega_h - \{\pi_0\}$.

Supposons maintenant qu'il existe un entier non nul k tel que $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$ et $k \notin \{| S_{i_1} |, | S_{i_2} |, | S_{i_1} | -1, | S_{i_2} | -1\}$ et soit $i \in \mathcal{Z}_k(T)$. On a $| f_x(S_i - \{x\}) | = | f_x(S_i) | = | S_i | = k$ (car $k \neq | S_{i_1} |$). Or, $f_x(S_i - \{x\}) = S_{\overline{f_x}(i)} - \{x\}$, donc $| S_{\overline{f_x}(i)} - \{x\} | = k$. Si $x \in S_{\overline{f_x}(i)}$, alors $\overline{f_x}(i) = i_1$ et $| S_{\overline{f_x}(i)} | = k + 1$ et par suite $| S_{i_1} | = k + 1$; ce qui contredit le fait que $k \neq | S_{i_1} | -1$. Ainsi, $x \notin S_{\overline{f_x}(i)}$ et par suite, $| S_{\overline{f_x}(i)} | = k$. Notons par $\overline{(f_y)^{-1}}$ l'isomorphisme du tournoi $(T_h)^\star$ sur le tournoi T_h induit par $(f_y)^{-1}$. Il est clair que $\overline{(f_y)^{-1}} = (\overline{f_y})^{-1}$. D'où, $S_{\pi(i)} = S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))}$ et $S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))} - \{y\} = (f_y)^{-1}(S_{\overline{f_x}(i)} - \{y\})$. Comme $y \notin S_{\overline{f_x}(i)}$ (car $| S_{\overline{f_x}(i)} | = k$, $y \in S_{i_2}$ et $k \neq | S_{i_2} |$), alors $| S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))} - \{y\} | = | S_{\overline{f_x}(i)} - \{y\} | = | S_{\overline{f_x}(i)} | = k$. Si $y \in S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))}$, alors $\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i)) = i_2$ et $| S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))} | = k + 1$ et par suite $| S_{i_2} | = k + 1$; ce qui contredit le fait que $k \neq | S_{i_2} | -1$. Il s'ensuit que $y \notin S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))}$ et par suite, $| S_{\overline{(f_y)^{-1}}(\overline{f_x}(i))} | = k$. Ainsi, $| S_{\pi(i)} | = k$ et l'entier k est alors régulièrement réparti dans T.

□

Lemme 14 *Si un entier $k \geq 2$ est régulièrement réparti dans T, alors pour tout $j \in \mathcal{Z}_k(T)$, T est symétrique par rapport à S_j.*

Preuve. Supposons qu'un entier $k \geq 2$ est régulièrement réparti dans T et soit $\pi \in \Omega_h - \{\pi_0\}$ tel que $\pi(\mathcal{Z}_k(T)) \subseteq \mathcal{Z}_k(T)$. Soient $j \in \mathcal{Z}_k(T)$ et $x \in S_j$. Comme $S_j - \{x\}$ est le seul intervalle maximal de cardinal $k - 1$ de $T - x$ et de $T^\star - x$ qui se trouve sur un π-polygone de répartition dont les autres sommets sont des intervalles de cardinal k, alors $f_x(S_j - \{x\}) = S_j - \{x\}$. Le lemme 12 permet ensuite de conclure.

□

Considérons maintenant les deux lemmes suivants.

Lemme 15 *Si $m \geq 3$ et si $\mathcal{Z}_{m-1}(T) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{Z}_{m-1}(T)$ est réduit à un singleton $\{i_0\}$ tel que p_{i_0} est $\{-1\}$-autodual et T est symétrique par rapport à S_{i_0}.*

Preuve. Supposons par l'absurde que $m \geq 3$ et que $n_{m-1}(T) \geq 2$. D'aprés le lemme 13, l'entier m est alors régulièrement réparti dans T. Il s'ensuit, d'aprés le lemme 14, que pour tout $j \in \mathcal{Z}_m(T)$, T est symétrique par rapport à S_j. Ainsi, l'entier $n_m(T)$ est impair et donc d'aprés le lemme 8, l'entier $n_{m-1}(T)$ est pair. Considérons maintenant un élément i de $\mathcal{Z}_{m-1}(T)$ et un élément x de S_i. On a alors: $n_{m-1}(T-x) = n_{m-1}(T)-1$ qui est impair et $n_m(T-x) = n_m(T)$ qui est aussi impair. D'aprés le lemme 8, $T-x$ est donc non autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-1\}$-autodual. Ainsi, $n_{m-1}(T) = 1$. Posons alors $\mathcal{Z}_{m-1}(T) = \{i_0\}$ et montrons que T est symétrique par rapport à S_{i_0} et que p_{i_0} est $\{-1\}$-autodual.

Montrons d'abord que $n_m(T) \geq 2$. Pour cela, supposons par l'absurde que $n_m(T) = 1$ et distinguons les trois cas suivants.

◇ Si $m \geq 4$ et s'il existe un entier $k \in \{2, \dots, m-2\}$ tel que $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$. Dans ce cas, considérons un élément i de $\mathcal{Z}_k(T)$ et un élément x de S_i. On a: $n_{m-1}(T-x) = n_{m-1}(T) = 1$ et $n_m(T-x) = n_m(T) = 1$. D'aprés le lemme 8, $T-x$ est donc non autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-1\}$-autodual.

◇ Si $m \geq 4$ et si pour tout entier $k \in \{2, \dots, m-2\}$, $\mathcal{Z}_k(T) = \emptyset$. Dans ce cas, pour $x \in S_{i_0}$, on a: $n_{m-2}(T-x) = n_{m-2}(T)+1 = 1$ et $n_m(T-x) = n_m(T) = 1$ et donc d'aprés le lemme 8, $T-x$ est non autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-1\}$-autodual.

◇ Si $m = 3$. Dans ce cas, comme $n \geq 7$, alors $h \geq 2$ et sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = 3$. Considérons l'entier i défini par:

$$i = \begin{cases} h+1 & \text{si } 2 \in \{|S_h|, |S_{2h}|\} \\ h & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut voir que S_i est réduit à un singleton $\{x\}$ et que $n_4(T-x) = n_2(T-x) = 1$; ce qui contredit l'autodualité de $T-x$, d'aprés le lemme 8. Ainsi, $n_m(T) \geq 2$.

Montrons maintenant que p_{i_0} est $\{-1\}$-autodual et que T est symétrique par rapport à S_{i_0}. Si $n_{m-2}(T) = 0$, alors le résultat découle de l'assertion (3) du lemme 12. Supposons donc que $n_{m-2}(T) \neq 0$. Comme $n_m(T) \geq 2$, alors d'aprés le lemme 13, l'entier $m-2$ est régulièrement réparti dans T. Soit $\pi \in \Omega_h - \{\pi_0\}$ tel que $\pi(\mathcal{Z}_{m-2}(T)) \subseteq \mathcal{Z}_{m-2}(T)$ et soit $x \in S_{i_0}$. Comme $S_{i_0} - \{x\}$ est le seul intervalle maximal de cardinal $m-2$ de $T-x$ et de $T^* - x$ qui se trouve sur un π-polygone de répartition dont aucun autre sommet n'est de cardinal $m-2$, alors $f_x(S_{i_0} - \{x\}) = S_{i_0} - \{x\}$ et donc, d'aprés l'assertion (2) du lemme 12, T est symétrique par rapport à S_{i_0}. Par ailleurs, comme $f_x(S_{i_0} - \{x\}) = S_{i_0} - \{x\}$, pour tout $x \in S_{i_0}$, alors p_{i_0} est $\{-1\}$-autodual.

□

Lemme 16 *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(1) *Si $m \geq 3$ et si l'entier $n_m(T)$ est impair, alors:*

  (a) *Pour tout $j \in \mathcal{Z}_m(T)$, T est symétrique par rapport à S_j.*

  (b) *Pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, $|S_i| \in \{1, m\}$.*

(2) *Si $m \geq 3$ et si l'entier $n_m(T)$ est pair, alors:*

(a) *$\mathcal{Z}_{m-1}(T)$ est réduit à un singleton $\{i_0\}$ et T est symétrique par rapport à S_{i_0}.*

(b) *Pour tout $i \in \{0,\dots,2h\} - \{i_0\}$, $|S_i| \in \{1,m\}$.*

(3) *Le tournoi T est autodual.*

Preuve. (1) Supposons que $m \geq 3$ et que l'entier $n_m(T)$ est impair. À l'aide du lemme 15, on peut voir que $n_{m-1}(T) = 0$ et par suite, pour tout $j \in \mathcal{Z}_m(T)$, le tournoi T est symétrique par rapport à S_j, d'aprés l'assertion (3) du lemme 12. Il reste à montrer que pour tout $i \in \{0,\dots,2h\}$, $|S_i| \in \{1,m\}$. Si $m = 3$, le résultat est trivial. Supposons par l'absurde que $m \geq 4$ et qu'il existe un entier $k \in \{2,\dots,m-2\}$ tel que $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$. Pour conclure, nous distinguons les deux cas suivants.

⋄ Si l'entier $n_k(T)$ est impair. Dans ce cas, soit $i \in \mathcal{Z}_m(T)$ et soit $x \in S_i$. On a: $n_{m-1}(T-x) = 1$ et $n_k(T-x) = n_k(T)$ est impair; ce qui contredit l'autodualité de $T-x$, d'aprés le lemme 8.

⋄ Si l'entier $n_k(T)$ est pair. Dans ce cas, soit $i \in \mathcal{Z}_k(T)$ et soit $x \in S_i$. On a: $n_k(T-x) = n_k(T) - 1$ est impair et $n_m(T-x) = n_m(T)$ est impair; ce qui contredit l'autodualité de $T-x$, d'aprés le lemme 8.

(2) Supposons que $m \geq 3$ et que l'entier $n_m(T)$ est pair. Si $n_{m-1}(T) = 0$, en utilisant l'assertion (3) du lemme 12, on déduit que $n_m(T)$ est impair; ce qui est absurde. Ainsi, $n_{m-1}(T) \neq 0$ et par suite, d'aprés le lemme 15, $\mathcal{Z}_{m-1}(T)$ est réduit à un singleton $\{i_0\}$ et T est symétrique par rapport à S_{i_0}. Il reste à montrer que pour tout $i \in \{0,\dots,2h\} - \{i_0\}$, $|S_i| \in \{1,m\}$. Si $m = 3$, le résultat est trivial. Supposons par l'absurde que $m \geq 4$ et qu'il existe un entier $k \in \{2,\dots,m-2\}$ tel que $\mathcal{Z}_k(T) \neq \emptyset$. Pour conclure, nous distinguons les deux cas suivants.

⋄ Si l'entier $n_k(T)$ est impair. Dans ce cas, soit $i \in \mathcal{Z}_m(T)$ et soit $x \in S_i$. On a: $n_m(T-x) = n_m(T) - 1$ est impair et $n_k(T-x) = n_k(T)$ est impair; ce qui contredit l'autodualité de $T-x$, d'aprés le lemme 8.

⋄ Si l'entier $n_k(T)$ est pair. Dans ce cas, soit $i \in \mathcal{Z}_k(T)$ et soit $x \in S_i$. On a: $n_k(T-x) = n_k(T) - 1$ est impair et $n_{m-1}(T-x) = n_{m-1}(T) = 1$; ce qui contredit l'autodualité de $T-x$, d'aprés le lemme 8.

(3) Si $m \geq 3$, l'autodualité de T découle des assertions (1) et (2) et du corollaire 7. Si $m \leq 2$, alors T est sans diamants et on conclut alors à l'aide du lemme 10.

□

Preuve de la proposition 10. Supposons que $h = 1$. Comme $n \geq 7$, alors $m \geq 3$. Si $|\mathcal{Z}(T)| = 1$, alors d'aprés le lemme 11, le tournoi T est un presque-ordre total. Supposons dans la suite que $|\mathcal{Z}(T)| \geq 2$. Suivant la parité de l'entier $n_m(T)$, on distingue les deux cas suivants.

• Si l'entier $n_m(T)$ est impair. Dans ce cas, d'aprés le lemme 16, pour tout $i \in \{0,1,2\}$, $|S_i| = m$, T est symétrique par rapport à S_i et p_i est autodual. Comme T est symétrique par rapport à S_0, alors $p_1 \simeq (p_2)^* \simeq p_2$ et comme T est symétrique par rapport à S_1, alors $p_0 \simeq (p_2)^* \simeq p_2$ Ainsi, T est le produit lexicographique du tournoi T_1 par le tournoi p_0. Notons que de l'assertion (3) du lemme 12, on déduit que p_0 est $\{-1\}$-autodual.

• Si l'entier $n_m(T)$ est pair. Dans ce cas, d'aprés le lemme 16, $n_{m-1}(T) = 1$ et $n_m(T) = 2$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m - 1$ et $|S_1| = |S_2| = m$. Ainsi, d'aprés le lemme 16, T est symétrique par rapport à S_0 et par suite $p_1 \simeq (p_2)^*$. Or tous les p_i sont autoduaux d'aprés le lemme 12, donc $p_1 \simeq p_2$. Pour tout sommet x de p_1 on a: $S_1 - \{x\}$ et S_0 sont les seuls intervalles maximaux de $T - x$ et de $T^* - x$ de cardinal $m - 1$. D'où, $f_x(S_1 - \{x\}) = S_0$ et $f_x(S_2) = S_2$. Il s'ensuit que $(p_1 - x) \simeq (p_0)^* \simeq p_0$. Ainsi, p_1 est $\{-1\}$-monomorphe et $\{-1\}$-autodual. D'autre part, d'aprés l'assertion (3) du lemme 12, p_0 est $\{-1\}$-autodual. Il s'ensuit que p_1 est $\{-2\}$-autodual. Ainsi, T est obtenu par la suppression d'un sommet du produit lexicographique du tournoi T_1 par le tournoi p_1.

Preuve de la proposition 11. Supposons que $h \geq 2$ et que $m \geq 3$. Suivant la parité de l'entier $n_m(T)$, on distingue les deux cas suivants.

• Si l'entier $n_m(T)$ est impair. Dans ce cas, d'aprés le lemme 16, pour tout $i \in \{0, \dots, 2h\}$, $|S_i| \in \{1, m\}$ et pour tout $i \in \mathcal{Z}_m(T)$, T est symétrique par rapport à S_i. Comme $h \geq 2$, alors du lemme 11, on déduit que $n_m(T) \geq 3$.

Montrons d'abord qu'il existe $i_0 \in \{0, \dots, 2h\}$ tel que $|S_{i_0}| = |S_{i_0+1}| = m$ où l'entier $i_0 + 1$ est considéré modulo $2h + 1$. Supposons par l'absurde que pour tout $i \in \mathcal{Z}_m(T)$, $i+1 \in \mathcal{Z}_1(T)$ où l'entier $i+1$ est considéré modulo $2h+1$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m$. Il s'ensuit que $|S_1| = 1$ et que le tournoi T est symétrique par rapport à S_0. Ainsi, $|S_1| = |S_{2h}| = 1$ et $|S_h| = |S_{h+1}| = 1$. Posons $S_1 = \{x_1\}$. Si $|S_{h+2}| = 1$, alors d'aprés la remarque 6, $T - x_1$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1} ayant l'ensemble $I = S_{h+1} \cup S_{h+2}$ comme seul intervalle maximal de cardinal 2 et par suite, $n_2(T - x_1) = 1$ et $n_m(T - x_1) = n_m(T)$ est impair; ce qui contredit l'autodualité de $T - x_1$, d'aprés le lemme 8. Il s'ensuit que: $|S_{h+2}| = m$, $h \geq 3$ et T est symétrique par rapport à S_{h+2}. En considérant alors l'isomorphisme α de T sur T^* qui laisse fixe S_{h+2}, on déduit que $\alpha(S_1) = S_2$, d'aprés le corollaire 6. Ainsi, $|S_2| = |S_1| = 1$. Le tournoi $T - x_1$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1} ayant l'ensemble $I = S_{h+1} \cup S_{h+2}$ comme seul intervalle maximal de cardinal $m+1$ et par suite, $f_{x_1}(I) = I$. D'où, $f_{x_1}(S_0) = S_2$, d'aprés le corollaire 6. Il s'ensuit que $|S_2| = |S_0| = m$; ce qui contredit le fait que $|S_2| = 1$. Ainsi, il existe $i_0 \in \{0, \dots, 2h\}$ tel que $|S_{i_0}| = |S_{i_0+1}| = m$ où l'entier $i_0 + 1$ est considéré modulo $2h + 1$. Sans perdre de généralité, on peut supposer alors dans la suite que $|S_0| = |S_1| = m$.

Montrons maintenant que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $|S_i| = m$. Comme T est symétrique par rapport à S_0, alors il suffit de montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, $|S_i| = m$. Comme $|S_0| = m$ et T est symétrique par rapport à S_1, alors $|S_2| = m$. Ainsi, le résultat est vérifié si $h = 2$. Supposons alors que $h \geq 3$ et soit $j \in \{2, \ldots, h-1\}$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, j\}$, $|S_i| = m$. Comme $|S_{j-1}| = m$ et T est symétrique par rapport à S_j, alors $|S_{j+1}| = m$. Il s'ensuit alors que pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, $|S_i| = m$.

Montrons enfin que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $p_i \simeq p_0$. Comme tous les p_i sont autoduaux (d'aprés le lemme 12) et comme le tournoi T est symétrique par rapport à S_0, alors il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, $p_i \simeq p_0$. En utilisant le fait que T est symétrique par rapport à S_{h+1}, on déduit d'aprés le corollaire 6 que $p_1 \simeq (p_0)^*$ et par suite $p_1 \simeq p_0$. Soit $i \in \{1, \ldots, h-1\}$ tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, i\}$, $p_j \simeq p_0$. Comme T est symétrique par rapport à S_{i+h+1}, alors d'aprés le corollaire 6, $p_{i+1} \simeq (p_i)^*$, et par suite $p_{i+1} \simeq p_i \simeq p_0$. Il s'ensuit que pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, $p_i \simeq p_0$.

Ainsi, le tournoi T est le produit lexicographique du tournoi T_h par le tournoi p_0. Notons que d'aprés l'assertion (3) du lemme 12, le tournoi p_0 est $\{-1\}$-autodual.

- Si l'entier $n_m(T)$ est pair. Dans ce cas, d'aprés le lemme 16, $n_{m-1}(T) = 1$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $|S_i| \in \{1, m-1, m\}$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m-1$ et par suite, pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $|S_i| \in \{1, m\}$. Il s'ensuit d'aprés le lemme 15, que T est symétrique par rapport à S_0 et que p_0 est $\{-1\}$-autodual.

Montrons d'abord que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $|S_i| = m$. Comme T est symétrique par rapport à S_0, alors il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, $|S_i| = m$. Pour montrer que $|S_1| = m$, on considère l'entier $t_0 = \min(\{t;\ t \in \{1, \ldots, h\}$ et $|S_t| = m\})$ et on suppose par l'absurde que $t_0 \geq 2$. Soit $x \in S_{t_0}$. Il est clair que S_0 et $S_{t_0} - \{x\}$ sont les seuls intervalles maximaux de $T - x$ et de $T^* - x$ de cardinal $m-1$. L'isomorphisme f_x échange donc S_0 et $S_{t_0} - \{x\}$ et laisse fixe un certain S_{j_0} où $j_0 \in \mathcal{Z}_m(T-x)$ (car $n_m(T-x) = n_m(T) - 1$ est impair). Posons $H = S_1 \cup \ldots \cup S_{t_0-1}$ et rappelons que pour tout $i \in \{1, \ldots, t_0 - 1\}$, $|S_i| = 1$. Du corollaire 6, on déduit que $f_x(H) = H$ et que pour tout $i \in \{1, \ldots, t_0-1\}$, $f_x(S_i) \neq S_i$. Il s'ensuit que $t_0 - 1$ est pair et donc t_0 est impair et $3 \leq t_0 \leq h$. Posons $t_0 = 2q+1$. D'aprés le corollaire 6, on déduit que $j_0 = \frac{t_0+1}{2} + h = q + 1 + h$ et donc $|S_{q+1+h}| = m$. En posant $S_q = \{y\}$, on voit d'aprés la remarque 6, que $T - y$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1}, ayant un intervalle $I = S_{q+h} \cup S_{q+h+1}$, qui est le seul de son cardinal (car $|I| \in \{m+1, 2m\}$) et par suite $n_{|I|}(T-y) = 1$ et $n_{m-1}(T-y) = n_{m-1}(T) = 1$; ce qui contredit l'autodualité de $T - y$, d'aprés le lemme 8. Ainsi, nous avons montré que $|S_1| = m$. Soit $i \in \{1, \ldots, h-1\}$ tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, i\}$, $|S_j| = m$ et soit $x \in S_i$. Comme S_0 et $S_i - x$ sont les seuls intervalles maximaux de $T - x$ et de $T^* - x$ de cardinal $m-1$, alors f_x échange S_0 et $S_i - x$ et laisse fixe un certain S_{j_0} où $j_0 \in \mathcal{Z}_m(T-x)$. D'aprés le corollaire 6, $f_x(S_{2h}) = S_{i+1}$. Comme $|S_{2h}|=|S_1|= m$ (car T est symétrique par rapport à S_0 et $|S_1|= m$), alors $|S_{i+1}|= m$. Ainsi, pour tout $i \in \{1,\dots,h\}$, $|S_i|= m$.

Montrons maintenant que pour tout $i \in \{1,\dots,2h\}$, $p_i \simeq p_1$. Comme chaque p_i est autodual d'aprés le lemme 12, et comme T est symétrique par rapport à S_0, alors il suffit de montrer que pour tout $i \in \{2,\dots,h\}$, $p_i \simeq p_1$. Soient $i \in \{2,\dots,h\}$ et $x \in S_{i-1}$. Comme S_0 et $S_{i-1} - \{x\}$ sont les seuls intervalles maximaux de $T - x$ et de $T^\star - x$ de cardinal $m - 1$, alors $f_x(S_{i-1} - \{x\}) = S_0$ et par suite, $f_x(S_i) = S_{2h}$, d'aprés le corollaire 6. D'où, $p_i \simeq (p_{2h})^\star$. Comme T est symétrique par rapport à S_0, alors $(p_{2h})^\star \simeq p_1$ et par suite $p_i \simeq p_1$. Ainsi, pour tout $i \in \{1,\dots,2h\}$, $p_i \simeq p_1$.

Enfin, comme pour tout $x \in S_1$, S_0 et $S_1 - \{x\}$ sont les seuls intervalles maximaux de $T - x$ et de $T^\star - x$ de cardinal $m - 1$, alors $f_x(S_1 - \{x\}) = S_0$. D'où, pour tout $x \in S_1$, $(p_1 - x) \simeq (p_0)^\star \simeq p_0$ et par suite p_1 est $\{-1\}$-monomorphe et $\{-1\}$-autodual. D'autre part, comme p_0 est $\{-1\}$-autodual, alors p_1 est $\{-2\}$-autodual.

Ainsi, T est obtenu par la suppression d'un sommet du produit lexicographique du tournoi T_h par le tournoi p_1.

Preuve de la proposition 12. Pour la preuve, nous utilisons en outre les notations suivantes.
Pour tout tournoi $R = T_h(R_0,\dots,R_{2h})$ où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0,\dots,2h\}$, R_i est un tournoi sur un ensemble ζ_i, on considère les quatre ensembles suivants.

$\mathcal{A}_1(R) = \{\zeta_i \in \mathcal{P}_1(R);\ |\zeta_{i+h}|=|\zeta_{i+h+1}|= 1\}$,
$\mathcal{A}_2(R) = \{\zeta_i \in \mathcal{P}_1(R);\ |\zeta_{i+h}|= 2$ et $|\zeta_{i+h+1}|= 1\}$,
$\mathcal{A}_3(R) = \{\zeta_i \in \mathcal{P}_1(R);\ |\zeta_{i+h}|= 1$ et $|\zeta_{i+h+1}|= 2\}$ et
$\mathcal{A}_4(R) = \{\zeta_i \in \mathcal{P}_1(R);\ |\zeta_{i+h}|=|\zeta_{i+h+1}|= 2\}$.

Remarquons que $\mathcal{A}_1(R) = \mathcal{A}_1(R^\star)$, $\mathcal{A}_2(R) = \mathcal{A}_3(R^\star)$, $\mathcal{A}_3(R) = \mathcal{A}_2(R^\star)$ et $\mathcal{A}_4(R) = \mathcal{A}_4(R^\star)$.

Revenons au tournoi T et supposons que $m = 2$ et que $h \geq 2$. Comme le tournoi T est autodual d'aprés le lemme 16, alors d'aprés le corollaire 7, on peut supposer que T est symétrique par rapport à S_0. Dans la suite de cette preuve, les indices sont considérés modulo $2h + 1$. Notons par Φ_0, un isomorphisme de T sur $T^\star$ tel que $\Phi_0(S_0) = S_0$. D'aprés le corollaire 6, pour tout $i \in \{0,\dots,2h\}$, $\Phi_0(S_i) = S_{-i}$. Suivant la parité de l'entier $n_2(T)$, on distingue les deux cas suivants.

- Si l'entier $n_2(T)$ est impair. Dans ce cas, $|S_0|= 2$ et la morphologie du tournoi T découle des 5 étapes suivantes.

Étape 1. $\mathcal{A}_4(T) = \emptyset$.
En effet: supposons par l'absurde qu'il existe $i \in \{1,\dots,2h\}$ tel que S_i est réduit à un singleton $\{x\}$ et $|S_{i+h}|=|S_{i+h+1}|= 2$. D'aprés la remarque 6, le tournoi

$T-x$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1} ayant l'ensemble $I = S_{i+h} \cup S_{i+h+1}$ comme seul intervalle maximal de cardinal 4 et par suite, $n_4(T-x) = 1$ et $n_2(T-x) = n_2(T) - 2$ est impair. Il s'ensuit que $T-x$ est non autodual d'aprés le lemme 8; ce qui contredit le fait que T est $\{-1\}$-autodual.

Étape 2. Si $|S_1| = 2$, alors pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $|S_i| = 2$.
En effet: comme T est symétrique par rapport à S_0, il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, $|S_i| = 2$. On a $|S_1| = 2$. Soit $j \in \{1, \ldots, h-1\}$ tel que pour tout $k \in \{1, \ldots, j\}$, $|S_k| = 2$. D'aprés l'étape 1, $|S_{h+1}| = 2$. Posons $\{x, y\} = S_{h+1}$. On a $f_x(\mathcal{A}_4(T-x)) = \mathcal{A}_4(T^\star - x)$ et $\mathcal{A}_4(T-x) = \mathcal{A}_4(T^\star - x) = \{y\}$. D'où, $f_x(y) = y$ et donc d'aprés le corollaire 6, $f_x(S_0) = S_1$. Comme $f_x(S_{h+1} - \{x\}) = S_{h+1} - \{x\}$, alors d'aprés l'assertion (2) du lemme 12, il existe un isomorphisme f de T sur $T^\star$ laissant fixe S_{h+1}. Ainsi, d'aprés le corollaire 6, pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $f(S_i) = S_{1-i}$. On a $\Phi_0(S_j) = S_{-j}$ et $f(S_{-j}) = S_{j+1}$, et par suite, $|S_{j+1}| = |S_{-j}| = |S_j| = 2$; ce qui permet de conclure.

Étape 3. Si $|S_1| = 1$ et si $h = 2$, alors $n = 8$, $|S_4| = 1$ et $|S_2| = |S_3| = 2$.
En effet: il suffit de voir que $n \geq 7$ et que T est symétrique par rapport à S_0.

Étape 4. Si $|S_1| = 1$ et si $h \geq 3$, alors $|S_h| = |S_{h+1}| = 1$.
En effet: supposons par l'absurde que $|S_h| = 2$. Comme T est symétrique par rapport à S_0, alors $|S_h| = |S_{h+1}| = 2$. Comme $|S_1| = 1$, alors d'aprés l'étape 1, $|S_{h+2}| = 1$. Posons $S_1 = \{x\}$ et $S_{h+2} = \{y\}$. L'ensemble $I = S_{h+1} \cup S_{h+2}$ est le seul intervalle maximal de cardinal 3 de $T-x$ et de $T^\star - x$. D'où, $f_x(I) = I$ et donc d'aprés le corollaire 6, $f_x(S_0) = S_2$ et $f_x(S_{2h}) = S_3$. Il s'ensuit que $|S_0| = |S_2| = 2$, $|S_3| = |S_{2h}| = |S_1| = 1$ et $h \geq 4$. D'autre part, l'ensemble $J = S_1 \cup S_2$ est le seul intervalle maximal de cardinal 3 de $T-y$ et de $T^\star - y$. D'où, $f_y(J) = J$ et donc d'aprés le corollaire 6, $f_y(S_0) = S_3$. Ainsi, $|S_3| = |S_0| = 2$; ce qui contredit le fait que $|S_3| = 1$.

Étape 5. Si $|S_1| = 1$ et si $h \geq 3$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $|S_i| = 1$.
En effet: comme T est symétrique par rapport à S_0, alors il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, $|S_i| = 1$. On a $|S_1| = 1$. Soit $j \in \{1, \ldots, h-1\}$ tel que pour tout $k \in \{1, \ldots, j\}$, $|S_k| = 1$. D'aprés l'étape 4, $|S_{h+1}| = |S_h| = 1$. Posons $S_{h+1} = \{x\}$. D'aprés la remarque 6, le tournoi $T-x$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1}, ayant l'ensemble $I = S_0 \cup S_1$ comme seul intervalle maximal de cardinal 3 et donc $f_x(I) = I$ et par suite d'aprés le corollaire 6, pour tout $i \in \{2, \ldots, h\} \cup \{h+2, \ldots, 2h\}$, $f_x(S_i) = S_{1-i}$. Il s'ensuit que $f_x(S_{-j}) = S_{j+1}$. Comme en plus, $\Phi_0(S_j) = S_{-j}$, alors $|S_{j+1}| = |S_{-j}| = |S_j| = 1$; ce qui permet de conclure.

- Si l'entier $n_2(T)$ est pair. Dans ce cas, $|S_0| = 1$ et $n_1(T)$ est impair. On va montrer en 4 étapes, que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $|S_i| = 2$.

Étape 1. $\mathcal{A}_2(T) = \mathcal{A}_3(T) = \emptyset$.
En effet: supposons par l'absurde qu'il existe $i \in \{1, \ldots, 2h\}$ tel que S_i est réduit à un singleton $\{x\}$ et $\{\mid S_{i+h} \mid, \mid S_{i+h+1} \mid\} = \{1, 2\}$. D'aprés la remarque 6, le tournoi $T - x$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1}, ayant l'ensemble $I = S_{i+h} \cup S_{i+h+1}$ comme seul intervalle maximal de cardinal 3. D'où, $n_3(T - x) = 1$ et $n_2(T - x) = n_2(T) - 1$ est impair. Il s'ensuit que $T - x$ est non autodual d'aprés le lemme 8; ce qui contredit le fait que T est $\{-1\}$-autodual.

Étape 2. S'il existe $i \in \{0, \ldots, 2h\}$ tel que $\mid S_i \mid = 1$ et $\mid S_{i+1} \mid = 2$, alors $\mid S_{i+h} \mid = \mid S_{i+h+1} \mid = 2$ et pour tout $x \in S_{i+h+1}$, $f_x(S_i) = S_{i+h+1} - \{x\}$. De plus, pour tout $j \in \{0, \ldots, 2h\} - \{i, i+h+1\}$, $\mid S_j \mid = \mid S_{2i+h+1-j} \mid$.
En effet: d'aprés l'étape précédente, pour un tel i, on voit que $\mid S_{i+h+1} \mid = 2$, puis que $\mid S_{i+h} \mid = 2$. Soit $x \in S_{h+i+1}$ et posons $S_{h+i+1} - \{x\} = \{y\}$ et $S_i = \{z\}$. On a: $f_x(\mathcal{A}_3(T - x)) = \mathcal{A}_3(T^* - x)$, $\mathcal{A}_3(T - x) = \mathcal{A}_2(T^* - x) = \{y\}$ et $\mathcal{A}_2(T - x) = \mathcal{A}_3(T^* - x) = \{z\}$. D'où, $f_x(y) = z$. Ainsi, $f_x(S_i) = S_{i+h+1} - \{x\}$ et d'aprés le corollaire 6, pour tout $j \in \{0, \ldots, 2h\} - \{i, i+h+1\}$, $\mid S_j \mid = \mid S_{2i+h+1-j} \mid$.

Étape 3. $\mid S_1 \mid = 2$.
En effet: supposons par l'absurde que $\mid S_1 \mid = 1$. Comme $\mid S_0 \mid = 1$ et T est symétrique par rapport à S_0, alors on peut considérer l'entier $i = \min(\{k;\ k \in \{2, \ldots, h\}$ et $\mid S_k \mid = 2\})$. On a $i \geq 2$, $\mid S_i \mid = 2$ et $\mid S_{i-1} \mid = \mid S_{i-2} \mid = 1$. D'aprés l'étape 2, $\mid S_{i-1+h} \mid = \mid S_{i+h} \mid = 2$. Posons $S_{i-1} = \{x\}$. D'aprés la remarque 6, le tournoi $T - x$ est une somme lexicographique suivant le tournoi T_{h-1}, ayant l'ensemble $I = S_{i-1+h} \cup S_{i+h}$ comme seul intervalle maximal de cardinal 4. D'où, $f_x(I) = I$ et par suite d'aprés le corollaire 6, $f_x(S_{i-2}) = S_i$. Il s'ensuit que $\mid S_{i-2} \mid = \mid S_i \mid = 2$; ce qui contredit le fait que $\mid S_{i-2} \mid = 1$.

Étape 4. Pour tout $i \in \{1, \ldots, 2h\}$, $\mid S_i \mid = 2$.
En effet: comme T est symétrique par rapport à S_0, il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, $\mid S_i \mid = 2$. On a $\mid S_1 \mid = 2$ d'aprés l'étape 3. Soit $j \in \{1, \ldots, h-1\}$ tel que pour tout $k \in \{1, \ldots, j\}$, $\mid S_k \mid = 2$. Comme $\mid S_0 \mid = 1$ et $\mid S_1 \mid = 2$, alors de l'étape 2, on déduit que $\mid S_h \mid = \mid S_{h+1} \mid = 2$ et que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\} - \{0, h+1\}$, $\mid S_i \mid = \mid S_{h+1-i} \mid$. D'où, $\mid S_{-j} \mid = \mid S_{h+1-(-j)} \mid = \mid S_{h+1+j} \mid$. Comme en plus, $\Phi_0(S_j) = S_{-j}$, alors $\mid S_{h+1+j} \mid = \mid S_{-j} \mid = \mid S_j \mid = 2$. Par ailleurs, on a: $\Phi_0(S_{h+1+j}) = S_{h-j}$ et $\mid S_{h-j} \mid = \mid S_{h+1-(h-j)} \mid = \mid S_{1+j} \mid$. Il s'ensuit que, $\mid S_{1+j} \mid = \mid S_{h-j} \mid = \mid S_{h+1+j} \mid = 2$; ce qui permet de conclure.

5 Preuve de la proposition 7

Considérons d'abord la remarque suivante.

Remarque 7 *Pour tout entier $h \geq 1$, notons par $\widetilde{\mathcal{D}}(T_h)$, la classe des tournois fortement connexes dont le squelette est le tournoi T_h.*

(1) *De l'assertion* (3) *du lemme 16, on voit que tout tournoi à au moins* 7 *sommets,* $\{-1\}$*-autodual et apartenant à* $\bigcup_{h\geq 1} \widetilde{\mathcal{D}}(T_h)$*, est autodual.*

(2) *Soient un entier* $k \geq 2$ *et un tournoi* T *à au moins* $6+k$ *sommets, appartenant à* $\bigcup_{h\geq 1} \widetilde{\mathcal{D}}(T_h)$ *tel que pour tout ensemble* X *à* $k-1$ *sommets de* T*, le tournoi* $T-X$ *appartient aussi à* $\bigcup_{h\geq 1} \widetilde{\mathcal{D}}(T_h)$*. De l'assertion* (1)*, on déduit que si* T *est* $\{-k\}$*-autodual, alors* T *est aussi* $\{-(k-1)\}$*-autodual.*

Preuve de la proposition 7. Soit $T = T_h(p_0, \ldots, p_{2h})$ un tournoi à $n \geq 8$ sommets, où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et soit $m = \max(\{|S_i|;\ i \in \{0, \ldots, 2h\}\})$. Notons d'abord que pour chacune des situations citées dans la proposition 7, en considérant un sommet arbitraire x de T, on vérifie que le tournoi $T-x$ est $\{-1\}$-autodual, d'aprés la remarque 6 et les propositions 10, 11 et 12, et par suite, le tournoi T est $\{-2\}$-autodual. Supposons dans la suite que T est $\{-2\}$-autodual et que $m \geq 2$. Suivant les valeurs de m et de h, on distingue les trois cas suivants.

• Cas 1. Si $h = 1$. Dans ce cas, comme $n \geq 8$, alors $m \geq 3$. Distinguons les sous-cas suivants.

◇ Si pour tout $i \in \{0,1,2\}$, $|S_i| \geq 2$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est aussi $\{-1\}$-autodual et par suite le tournoi T vérifie l'une des deux situations (b) et (c) citées dans la proposition 10. Supposons par l'absurde que T vérifie la situation (c) de la proposition 10 et considérons un élément x d'un certain $S_i \in \mathcal{P}_m(T)$. On voit d'aprés la proposition 10, que $T-x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual. Il s'ensuit que T est le produit lexicographique du tournoi T_1 par un tournoi τ à m sommets, autodual et $\{-1\}$-autodual. Soit $x \in S_0$. Comme $T-x$ est $\{-1\}$-autodual, alors d'aprés la proposition 10, τ est $\{-1\}$-monomorphe et $\{-2\}$-autodual. Ainsi, le tournoi T vérifie la situation (d) de la proposition 7.

◇ S'il existe $i \in \{0,1,2\}$ tel que $|S_i| = 1$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m$. Supposons par l'absurde que $\max(|S_2|, |S_1|) \geq 2$ et que $\min(|S_2|, |S_1|) = 1$ et soit $x \in S_0$. D'aprés la proposition 10, $T-x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual. Ainsi, $|S_1| = |S_2| = 1$. Dans ce cas, comme $n \geq 8$, alors $m \geq 6$. Soit $x \in S_0$. Comme $T-x$ est $\{-1\}$-autodual, alors d'aprés la proposition 10, $T-x$ est un presque-ordre total. D'où, pour tout $x \in S_0$, $p_0 - x$ est un ordre total. Il s'ensuit que p_0 est aussi un ordre total et par suite, T est un presque-ordre total. Ainsi, le tournoi T vérifie la situation (a) de la proposition 7.

• Cas 2. Si $h \geq 2$ et si $m = 2$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est aussi $\{-1\}$-autodual et par suite, le tournoi T vérifie l'une des quatre situations citées dans la proposition 12.

$\diamond$ Supposons par l'absurde que T vérifie la situation (b) de la proposition 12. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0|= 1$ et que pour tout $i \in \{1,\dots,2h\}$, $|S_i|= 2$. Soit $x \in S_1$. D'aprés la proposition 12, $T-x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual.

$\diamond$ Supposons par l'absurde que T vérifie la situation (c) de la proposition 12. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0|= 2$ et que pour tout $i \in \{1,\dots,2h\}$, $|S_i|= 1$. Soit $x \in S_1$. D'aprés la remarque 6 et la proposition 12, $T-x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual.

$\diamond$ Supposons par l'absurde que T vérifie la situation (d) de la proposition 12. Dans ce cas, soit $x \in S_0$. D'aprés la proposition 12, $T-x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual.

Ainsi, le tournoi T vérifie la situation (c) de la proposition 7.

• Cas 3. Si $h \geq 2$ et si $m \geq 3$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est aussi $\{-1\}$-autodual et par suite le tournoi T vérifie l'une des deux situations citées dans la proposition 11. Supposons par l'absurde que T vérifie la situation (b) de la proposition 11. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0|= m-1$ et que pour tout $i \in \{1,\dots,2h\}$, $|S_i|= m$. Soit $x \in S_1$. D'aprés la proposition 11, $T-x$ n'est pas $\{-1\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-2\}$-autodual. Ainsi, T est le produit lexicographique de T_h par un tournoi τ à m sommets, autodual et $\{-1\}$-autodual. Soit $x \in S_0$. Comme le tournoi $T-x$ est $\{-1\}$-autodual, alors τ est $\{-1\}$-monomorphe et $\{-2\}$-autodual, d'aprés la proposition 11. Ainsi, le tournoi T vérifie la situation (d) de la proposition 7.

6 Preuve de la proposition 8

Soit $T = T_h(p_0,\dots,p_{2h})$ un tournoi à $n \geq 9$ sommets, où $h \geq 1$ et pour tout $i \in \{0,\dots,2h\}$, p_i est un tournoi sur un ensemble S_i et soit $m = \max(\{|S_i|;\ i \in \{0,\dots,2h\}\})$. Si T est un presque-ordre total, alors il est fortement autodual et par suite, il est $\{-3\}$-autodual. Réciproquement, supposons que T est $\{-3\}$-autodual. Suivant les valeurs de m et de h, on distingue les quatre cas suivants.

• Cas 1. Si $m = 1$. Dans ce cas, comme $n \geq 9$, alors T est isomorphe au tournoi T_h et $h \geq 4$. Soit x un sommet de T. D'aprés la remarque 6, le tournoi $T-x$ est isomorphe au tournoi obtenu à partir du tournoi T_{h-1} en dilatant un de ses sommets par un ordre total à 2 sommets. Ainsi, d'aprés la proposition 7, $T-x$ n'est pas $\{-2\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-3\}$-autodual.

• Cas 2. Si $h = 1$ et si $m \geq 2$. Dans ce cas, comme $n \geq 9$, alors $m \geq 3$. Distinguons les sous-cas suivants.

$\diamond$ Si pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, $|S_i|\geq 3$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est $\{-2\}$-autodual et par suite, de la proposition 7, on déduit que pour tout

$i \in \{0, 1, 2\}$, $|S_i| = m$. Soit $x \in S_0$. D'aprés la proposition 7, le tournoi $T - x$ n'est pas $\{-2\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-3\}$-autodual.

⋄ Si $|\mathcal{Z}(T)| \geq 2$ et s'il existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tel que $|S_i| \leq 2$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m$. Dans ce cas, soit $x \in S_0$. Comme $n \geq 9$, alors $m \geq 4$ et de la proposition 7, on déduit que $T - x$ n'est pas $\{-2\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-3\}$-autodual.

⋄ Si $|\mathcal{Z}(T)| = 1$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|S_0| = m$ et que $|S_1| = |S_2| = 1$. Dans ce cas, comme $n \geq 9$, alors $m \geq 7$. Soit $x \in S_0$. Comme $T - x$ est $\{-2\}$-autodual, alors de la proposition 7, on déduit que $T - x$ est un presque-ordre total. Il s'ensuit que pour tout $x \in S_0$, $p_0 - x$ est un ordre total et par suite, p_0 est aussi un ordre total. Ainsi, le tournoi T est un presque-ordre total.

- Cas 3. Si $h = 2$ et si $m \geq 2$. Dans ce cas, distinguons les sous-cas suivants.

⋄ Si pour tout $i \in \{0, \ldots, 4\}$, $|S_i| \geq 2$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est aussi $\{-2\}$-autodual et par suite, de la proposition 7, on déduit que pour tout $i \in \{0, \ldots, 4\}$, $|S_i| = m$. Soit $x \in S_0$. D'aprés la proposition 7, le tournoi $T - x$ n'est pas $\{-2\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-3\}$-autodual.

⋄ S'il existe $i \in \{0, \ldots, 4\}$ tel que $|S_i| = 1$. Dans ce cas, soit x un élément d'un certain S_j où $|S_j| = m$. D'aprés la proposition 7, la $\{-2\}$-autodualité du tournoi $T - x$ entraîne que $T - x \simeq T_2$. Il s'ensuit que $n = 6$; ce qui est absurde.

- Si $h \geq 3$ et si $m \geq 2$. Dans ce cas, d'aprés la remarque 7, T est $\{-2\}$-autodual. D'aprés la proposition 7, on déduit donc que pour tout $i \in \{0, \ldots, 2h\}$, $|S_i| = m$. Soit $x \in S_0$. D'aprés la proposition 7, le tournoi $T - x$ n'est pas $\{-2\}$-autodual; ce qui contredit le fait que T est $\{-3\}$-autodual.

7 Preuve du corollaire 5

Pour la preuve, comme il est évident que l'assertion (c) implique l'assertion (a), alors on va montrer que l'assertion (a) implique l'assertion (b) puis, que l'assertion (b) implique l'assertion (c).

- Supposons l'assertion (a) et montrons l'assertion (b), par récurrence sur $k \geq 4$.

Pour $k = 4$; le résultat est trivial.

Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $k \geq 4$ et soit R un tournoi $\{-(k+1)\}$-autodual, à $n \geq 6 + (k+1)$ sommets. D'aprés la proposition 4, R est $\{4\}$-autodual et par suite, R est un tournoi sans diamants. Soit X un ensemble à k sommets de R. Comme $R - X$ est un tournoi sans diamants, à au moins 7 sommets, qui est $\{-1\}$-autodual, alors du lemme 10, découle que $R - X$ est autodual. Ainsi, le tournoi R est $\{-k\}$-autodual et par suite, d'aprés l'hypothèse de récurrence, R est $\{-4\}$-autodual.

• Supposons l'assertion (b) et montrons l'assertion (c). Dans ce cas, d'aprés la proposition 4, T est $\{4\}$-autodual (car $n \geq 10$) et par suite, T est un tournoi sans diamants. Soit X un ensemble à 3 sommets de T. Comme $T - X$ est un tournoi sans diamants, à au moins 7 sommets, qui est $\{-1\}$-autodual, alors d'aprés le lemme 10, $T - X$ est autodual. Ainsi, le tournoi T est $\{-3\}$-autodual et par suite, T est $\{4, -3\}$-autodual. On conclut alors par le corollaire 3.

Références

[1] M. Basso-Gerbelli, P. Ille, La reconstruction des relations définies par interdits, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I, (1993) 1229-1234.

[2] Y. Boudabbous, A. Boussairi, Reconstruction des tournois et dualité, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, (1995) 397-400.

[3] Y. Boudabbous, J. Dammak, P. Ille, Indecomposability and duality of tournaments, Discrete Math. 223 (2000) 55-82.

[4] A. Boussairi, Communication personnelle.

[5] A. Boussairi, Décomposabilité, dualité et groupes finis en théorie des relations. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, France (1995).

[6] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, Theoret. Comput. Sci. 3 (70) (1990) 343-358.

[7] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in: Orders, Description and Roles, M. Pouzet et D. Richard éd. North-Holland (1984) 313-342.

[8] R. Fraïssé, Abritement entre relations et spécialemnt entre chaînes, Symposi. Math. Instituto Nazionale di alta. Mathematica, 5, (1970) 203-251.

[9] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967) 25-66.

[10] C. Gnanvo, P. Ille, La reconstruction des tournois sans diamants, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38, (1992) 283-291.

[11] F. Harary, E. Palmer, On the problem of reconstructing tournament from subtournaments, Monatsh. Math. 71, (1967) 14-23.

[12] G. Lopez, L'indéformabilité des relations et multirelations binaires, Z. Math. Logik Grundlag. Math, 24, (1978) 303-317.

[13] G. Lopez, C. Rauzy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and (n-1), I, Z. Math. Logik Grundlag. Math, 38, (1992) 27-37.

[14] J. W. Moon, Topics on tournaments. Holts, Rinchard and Winston, New York (1968).

[15] M. Pouzet, Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations, Math. Zeitschr. 150, (1976) 117-134.

[16] K. B. Reid, C. Thomassen, Strongly self-complementary and hereditarily isomorphic tournaments, Monatshefte Math. 81, (1976) 291-304.

[17] J. H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191-205.

[18] S. M. Ulam, A collection of Mathematical problems, Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., Intrescience Publishers, Groningen, New York, 1960, 29.