Scores des tournois localement transitifs

Abdelkader Belkillani
Université 7 Nov. Carthage, IPEST, La Marsa. Tunisia
E-mail: abdelkader_belkilani@yahoo.fr

June 25, 2009

Abstract

In this paper we determine the scores of locally transitive tournaments and conversely, for such score we construct all locally transitive tournaments having this score. This allows us to establish, for a given matrix, a test for the locally transitive property.

1 Rappels et notations

Un n-tournoi est la donnée d'une relation antisymétrique et totale " $\rightarrow$ "sur un ensemble de cardinal n. On lira "$x \rightarrow y$"par: x domine y , ou encore :y est un successeur de x ou encore: x est un prédécesseur de y.

On désigne par x_+ l'ensemble des successeurs de x et par x_- l'ensemble de ses prédécesseurs. Le nombre $|x_+|$ de successeurs de x est appelé score de x. Noter que $|x_+| + |x_-| = n - 1$; pour tout x.

Le score d'un $n-$tournoi est la suite des scores des éléments ordonnée par ordre croissant. On notera $[s_1, s_2, ..., s_n]$ pour indiquer une suite croissante.

Un élément qui domine (resp.qui est dominé par) tous les autres est appelé champion (resp.pion).

Un tournoi est dit localement transitif si, pour tout x, la relation est transitive dans x_+ et dans x_-. Ces tournois sont caractérisés par une propriété dite des intervalles (cf. ([1]) ou ([2]))

2 Score d'un tournoi localement transitif

Lemme 1 *Soit $\mathcal{T} = (E, \rightarrow)$ un $n-$tournoi l.t , $x \in E$ et s le score de x.*

1. *le score du champion des prédécesseurs de x est supérieur ou égal à $n-s-1$.*
2. *le score du pion des prédécesseurs de x est inférieur ou égal à $s+1$.*
3. *le score du pion des successeurs de x est inférieur ou égal à $n-s-1$.*

Preuve.

1. On a : $|x_-| = n - s - 1$. Le champion y de x_- domine les $n - s - 2$ autres prédécesseurs de x et domine x.

2. le pion y de x_- ne domine aucun des éléments de x_-.

3. le pion de x_+ ne domine ni x ni aucun des éléments de x_+.

■

Proposition 2 *Soit $\mathcal{T} = (E, \rightarrow)$ un $n-$tournoi et $[s_1, s_2, ..., s_n]$ son score.*

Si $\mathcal{T}$ est localement transitif alors on a les propriétés :
symétrie : $s_i + s_{n+1-i} = n - 1 \qquad \forall i$
connexité : $s_{i+1} - s_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i$

Preuve. Si $n = 2$ alors $[s_1, s_2] = [0, 1]$ est symétrique et connexe.
Si $n = 3$ alors on a deux possibilités :

$$[s_1, s_2, s_3] = [0, 1, 2] \qquad \text{ou} \qquad [s_1, s_2, s_3] = [1, 1, 1]$$

Les deux sont symétriques et connexes.
Raisonnons par récurrence et supposons $n \geq 4$.

Première étape. Démontrons que : $s_1 + s_n = n - 1$ et $s_2 - s_1 \in \{0, 1\}$
Soit x_1 telque $s(x_1) = s_1$. D'après la partie 1) du lemme précédent, le score du champion y de x_- est supérieur ou égal à $n-\ s_1 - 1$. D'où

$$s_n \geq n - s_1 - 1$$

Maintenant s'il existait x telque $s(x) > n-\ s_1 - 1$ alors, d'après 3) il existerait un élément z telque : $s(z) \leq n-\ s(x) - 1 < s_1$, ce qui contredit la minimalité de s_1. D'ou :

$$s_n = n - 1 - s_1 = s(y)$$

D'un autre côté, la partie 2) du lemme et la minimalité de s_1 donnent :

$$s_2 - s_1 \in \{0, 1\}$$

Deuxième étape. Soit x telque $s(x) = s_1$ et y le champion de x_-. Notons $E' = E \setminus \{x, y\}$; $\mathcal{T}'$ la réstriction de $\mathcal{T}$ à E' et $[s'_1, s'_2, ..., s'_{n-2}]$ le score (ordonné) de $\mathcal{T}'$.
Montrons que : $[s'_1, s'_2, ..., s'_{n-2}] = [s_2 - 1, ..., s_{n-1} - 1]$ (i.e. $s'_i = -1 + s_{i+1}$).
Comme $s(y) = n-\ s(x) - 1 = n - 1 - |x_+|$ et comme y domine x et ses autres prédécésseurs, alors y ne domine aucun des éléments de x_+, donc ceux-ci le dominent ce qui montre que leur score dans $\mathcal{T}'$ diminue d'une unité relativement à leur score dans $\mathcal{T}$. Quant aux éléments de x_-; il est clair que leur score baisse d'une unité lorsqu'on "oublie" x.

Troisième étape. Par hypothèse de récurrence on a :

$$s'_i + s'_{n-1-i} = n - 3; \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq n - 2.$$

Il en découle que :

$$s_{i+1} + s_{n-i} = n - 1 \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq n-2$$

i.e. :

$$s_i + s_{n+1-i} = n - 1; \qquad \text{pour } 2 \leq i \leq n-1$$

Ce qui, compte tenu de la première étape, établit la symétrie du score de $\mathcal{T}$.

Par ailleurs : $s_2 - s_1 \in \{0,1\} \implies s_n - s_{n-1} \in \{0,1\}$ (grâce à la symétrie), et pour $2 \leq i \leq n-1$ on a :

$$s_{i+1} - s_i = s_i' - s_{i-1}' \in \{0,1\}$$

ce qui établit la connexité du score de $\mathcal{T}$. ■

Application

Rappelons que la matrice d'incidence d'un n-tournoi $(X, \rightarrow)$ est la matrice antisymétrique (a_{ij}) définie par : $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_i \rightarrow x_j$

Le score d'un élément x_i est égal au nombre de $+1$ situés sur la i-ème ligne. La proposition précédente donne un test pour vérifier quand (a_{ij}) ne correspond pas à un tournoi localement transitif. Considérons par exemple la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur score du tournoi correspondant est : $[4,4,4,4,4,4,4,4,4]$; qui est connexe et symétrique, le tournoi pourrait être l.t. Mais obsevons la sous-matrice formée par les quatre premières lignes et les quatre premières colonnes; son score est $[0,2,2,2]$, qui n'est pas connexe (ni symétrique!) et parsuite le sous-tournoi correspondant n'est pas l.t. Ceci montre que le 9-tournoi considéré n'est pas l.t.

Signalons cette conséquence immédiate de la poposition précédente :

Un tournoi localement transitif a même score que son dual.

3 Extention et construction

On va présenter deux procédés d'extension de tournois l.t. avec contrôle du score. En particulier on obtiendra la réciproque de la proposition 2.

Rappelons que si $\mathcal{T} = (E, \rightarrow)$ est un n-tournoi l.t. et $x \in E$ de score s, et en indexant ainsi :

$$x = x_{n-s}$$

$$x_+ = \{x_{n-s+1}, ..., x_n\}\text{ ; avec : } x_i \to x_j \Leftrightarrow i < j \tag{1}$$

$$x_- = \{x_1, x_2, ..., x_{n-s-1}\}\text{ ; avec : } x_i \to x_j \Leftrightarrow i < j \tag{2}$$

alors la relation entre les éléments de x_- et ceux de x_+ est décrite par une application

$$\varphi : \{1, ..., n-s-1\} \to \{n-s, ..., n\}$$

vérifiant :

$$x_i \to x_j \Leftrightarrow j \leq \varphi(i)$$

La condition nécéssaire et suffisante sur φ qui, ajoutée aux conditions (1) et (2), assure la locale transitivité est d'être **croissante** (cf. ([1]))

Proposition 3 *Soit*

$$\varphi : \{1, ..., m-s-1\} \to \{m-s, ..., m\}$$

une application croissante et

$$\psi : \{0, 1, ..., m-s-1\} \to \{m-s, ..., m+1\}$$

l'application définie par :

$$\psi(0) = m-s,\ \psi(i) = \varphi(i) + 1;\ 1 \leq i \leq m-s-1$$

Soit $\mathcal{T}_\varphi = ((x_1, ... x_m), \to)$, $\mathcal{T}_\psi = ((y_0, ... y_{m+1}), \to)$ les tournois l.t. associés respectivement à φ et ψ. Alors la restriction de $\mathcal{T}_\psi$ au complémentaire du couple $\{y_0, y_{m-s}\}$ est isomorphe à $\mathcal{T}_\varphi$.

Preuve. Notons

$$X = \{x_1, ..., x_m\}, \qquad Y = \{y_0, ..., y_{m+1}\}, \qquad Y' = Y \setminus \{y_0, y_{m-s}\}$$

L'application $f : X \to Y$ définie par :

$$f(x_i) = \begin{cases} y_i & \text{si } 1 \leq i \leq m-s-1 \\ y_{i+1} & \text{si } m-s \leq i \leq m \end{cases}$$

est une bijection entre X et Y'.

Montrons que f respecte les structures de tournoi.

Supposons que : $x_i \longrightarrow x_j$. On distingue trois cas :

1. $\{i, j\} \subset \{1, ..., m-s-1\}$. On a

$$x_i \to x_j \Leftrightarrow i < j \Leftrightarrow y_i \to y_j \Leftrightarrow f(x_i) \to f(x_j).$$

2. $\{i,j\} \subset \{m-s,...,m\}$. On a

$$x_i \to x_j \Leftrightarrow i < j \Leftrightarrow i+1 < j+1 \Leftrightarrow f(x_i) \to f(x_j).$$

3. $1 \leq i \leq m-s-1 < j \leq m$. On a :

$$x_i \to x_j \Leftrightarrow j \leq \varphi(i) \Leftrightarrow j+1 \leq \psi(i) \Leftrightarrow y_i \to y_{j+1} \Leftrightarrow f(x_i) \to f(x_j).$$

■

Remarque 4 *Avec les notations de la proposition précédente, comparons le score de $\mathcal{T}_\varphi$ au score de $\mathcal{T}_\psi$.*

On a :

$$s(y_{m-s}) = |(y_{m-s})_+| = s+1 \qquad , s(y_0) = \psi(0) - 0 = m-s$$

Pour $0 \leq i \leq m-s-1$ on a : $y_0 \to y_i$ et $y_i \to y_{m-s}$ et alors

$$s(y_i) = 1 + s(x_i)$$

Pour $m-s+1 \leq i \leq m+s$ on a $y_i \to y_0$ (puisque $\psi(0) < i$) , et $y_{m-s} \to y_i$. D'où

$$s(y_i) = 1 + s(x_{i-1})$$

Finalement : le score de T_ψ est obtenu en ajoutant $+1$ à tous les scores dans T_φ, puis en répétant le score $s+1$ et le score $m-s$. En pariculier, si s est le minimum du score de T_φ, alors le minimum du score de T_ψ est $s+1$ (avec répétition).

Corollaire 5 *Si T_φ est un m-cycle alors T_ψ est un $(m+2)$-cycle*

Proposition 6 *Soit*

$$\varphi : \{1,...,m-s-1\} \to \{m-s,...,m\}$$

une application croissante et

$$\psi : \{-1,0,1,...,m-s-1\} \to \{m-s,...,m\}$$

l'application définie par :

$$\psi(-1) = m-s, \qquad \psi(i) = \varphi(i+1); 0 \leq i \leq m-s-2, \qquad \psi(m-s-1) = m$$

Soit

$$\mathcal{T}_\varphi = ((x_1,...x_m),\to), \qquad \mathcal{T}_\psi = ((y_{-1}, y_0,...y_m),\to)$$

les tournois l.t. associés. Alors la restriction de $\mathcal{T}_\psi$ au complémentaire du couple $\{y_{-1}, y_{m-s,}\}$ est isomorphe à $\mathcal{T}_\varphi$.

Preuve. Soit $f : X \rightarrow Y$ définie par :

$$f(x_i) = \begin{cases} y_{i-1} & \text{si } 1 \leq i \leq m-s \\ y_i & m-s < i \end{cases}$$

Alors f est une bijection entre X et $Y' = Y \backslash \{y_{-1}, y_{m-s},\}$. Vérifions qu'elle respecte les structures. Nous distinguons quatre cas.

1. $\{i,j\} \subset \{1,...,m-s\}$. Dans ce cas on a

$$x_i \rightarrow x_j \Leftrightarrow i < j \Leftrightarrow i-1 < j-1 \Leftrightarrow f(x_i) = y_{i-1} \rightarrow f(x_j).$$

2. $i = m-s < j \leq m$. On a d'une part $x_{m-s} \rightarrow x_j$. D'autre part $y_{m-s-1} \rightarrow y_j$ (car $\psi(m-s-1) = m$) ce qui donne $f(x_{m-s}) \rightarrow f(x_j)$.

3. $1 \leq i < m-s < j \leq m$. Dans ce cas on a :

$$x_i \rightarrow x_j \Leftrightarrow j \leq \varphi(i) = \psi(i-1) \Leftrightarrow y_{i-1} \rightarrow y_j \Leftrightarrow f(x_i) \rightarrow f(x_j)$$

4. $\{i,j\} \subset \{m-s+1,..,m\}$. On a :

$$x_i \rightarrow x_j \Leftrightarrow i < j \Leftrightarrow y_i \rightarrow y_j \Leftrightarrow f(x_i) \rightarrow f(x_j).$$

■

Remarque 7 *Comparons le score de $\mathcal{T}_\psi$ au score de $\mathcal{T}_\varphi$. On a :*

$$s(y_{-1}) = \psi(-1) - (-1) = m-s+1, \qquad s(y_{m-s}) = s$$

Pour $0 \leq i < m-s-1$, on a : $y_{-1} \rightarrow y_i \rightarrow y_{m-s}$.
Comme $y_i = f(x_{i+1})$, on trouve : $s(y_i) = 1 + s(x_{i+1})$.
Pour $m-s+1 \leq i \leq m$ on a : $y_{m-s} \rightarrow y_i$ et $y_i \rightarrow y_{-1}$.
Comme $y_i = f(x_i)$, on trouve : $s(y_i) = 1 + s(x_i)$.
Finalement : le score de $\mathcal{T}_\psi$ est obtenu en ajoutant $+1$ à tous les scores dans $\mathcal{T}_\varphi$ et en adjoignant les scores s et $m-s+1$. En particulier, le minimum des scores dans $\mathcal{T}_\varphi$ est le même que dans $\mathcal{T}_\psi$, en outre dans $\mathcal{T}_\psi$ il ne se répète pas.

Corollaire 8 *Si $\mathcal{T}_\varphi$ est le n-tournoi transitif, alors $\mathcal{T}_\psi$ est le $n+2$-tournoi transitif.*

Théorème 9 *Soit $n \geq 2$. Une suite croissante $[s_1,...,s_n] \in \mathbb{N}^n$ est le score d'un tournoi localement transitif si et seulement si elle est connexe (i.e. : $s_i \leq s_{i+1} \leq 1 + s_i$) et symétrique(i.e. $s_i + s_{n+1-i} = n-1$).*

Preuve. La nécéssité est établie par la proposition 2. Reste la suffisance des conditions de symétrie et de connexité.

Pour $n = 2$, la symétrie et la connexité impliquent $[s_1, s_2] = [0,1]$ qui est bien un score et correspond à l'unique 2-tournoi, lequel est transitif.

Pour $n = 3$ on a $[s_1, s_2, s_3] = [0, 1, 2]$: score du 3-tournoi transitif, ou bien $[s_1, s_2, s_3] = [1, 1, 1]$: score du 3-cycle.

Raisonnons par récurrence et supposons $n \geq 4$.

Notons d'abord que si $s_1 = 0$ alors, par symétrie, $s_n = n-1$ et, par connexité, on a : $[s_1, ..., s_n] = [0, 1, 2, ..., n-1]$ qui est le score du n-tournoi transitif.

Sinon, posons pour $2 \leq i \leq n-1$, $s'_i = s_i - 1$. La suite $[s'_2, ..., s'_{n-1}]$ est connexe et symétrique donc est le score d'un $n-2$-tournoi l.t. $\mathcal{T}$. En pointant ce tournoi en x de score $s = s_2 - 1$, on obtient $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\varphi$; où $\varphi : \{1, ..., m-s-1\} \to \{m-s, ..., m\}$ est une fonction croissante (avec $m = n-2$) (cf. ([1])).

Considérons les deux cas : $s_1 < s_2$ ou $s_1 = s_2$.

Si $s_1 < s_2$, alors $s_2 - 1 = s_1$ et le procédé d'extension de la proposition 6 donne le tournoi $\mathcal{T}_\psi$ dont le score est bien $[s_1, ..., s_n]$.

Si $s_1 = s_2$ alors le tournoi $\mathcal{T}_\psi$ obtenu par le procédé de la proposition 3 admet pour score $[s_1, ..., s_n]$. ∎

Théorème 10 *Tout n-tournoi localement transitif s'obtient en appliquant itérativement les procédés des propositions 3 et 6 à un 2-tournoi ou à un 3-tournoi.*

Preuve. Les cas d'un tournoi transitif et d'un cycle sont réglés par les corollaires des propositions 3 et 6. Supposons donc que $\mathcal{T} = (X, \to)$ ne soit ni transitif, ni un cycle, alors il existe $x \in X$ telque $s(\pi^{-1}(x)) = s(x)+1$ et $0 < s(x) \leq s(\pi(x))$; où $\pi(x)$ désigne le champion des successeurs de x. En effet, π est une permutation circulaire sur X (cf. ([1])) et le vecteur score n'est pas constant; donc il existe x telque

$$s(x) < s(\pi^{-1}(x)) \qquad \text{et} \qquad s(x) \leq s(\pi(x))$$

et alors, d'après la propriété des intervalles, ou encore la croissance de la fonction caractéristique, on aura :

$$s(x) = s(\pi^{-1}(x)) - 1$$

Notons $n = m + 2$, $s = s(x)$, pointons le n-tournoi $\mathcal{T}$ en x et indexons X ainsi :

$$\mathcal{T} : x_{-1} \to x_0 \to \ldots\ldots \to x_{m-s-1} \to [x_{m-s} = x] \to x_{m-s+1} \to \ldots \to x_m$$

Notons χ la fonction caractéristique du tournoi pointé $(\mathcal{T}, x)$. On a :

$$x_{m-s+1} = \pi(x) \Longrightarrow s(x_{m-s+1}) \geq s(x) \Longrightarrow x_{m-s+1} \longrightarrow x_{-1}$$

Parsuite on a

$$\chi(-1) = m - s \tag{3}$$

D'autre part on a :

$$x_{m-s-1} = \pi^{-1}(x) \Longrightarrow s(x_{m-s-1}) > s(x)$$

D'où

$$\chi(m - s - 1) = m \tag{4}$$

Les égalités (3) et (4) montrent que $\mathcal{T}$ est obtenu en appliquant le procédé de construction de la proposition 6 au sous-tournoi obtenu par restriction de $\mathcal{T}$ à $X \setminus \{x_{-1}, x_{m-s-1}\}$. Ceci établit le résultat par récurrence sur n. ∎

4 Matrices d'incidence

Soit $\mathcal{T} = (X, \rightarrow)$ un n-tournoi et $(x_1, ..., x_n)$ une indexation de X. La matrice d'incidence

$$(a_{ij}) = mat(\mathcal{T}, (x_1, ..., x_n))$$

est la matrice antisymétrique définie par :

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_i \rightarrow x_j$$

Notons $T_r = (t_{ij})$ la matrice antisymétrique $r \times r$ définie par : $t_{ij} = 1 \Leftrightarrow i < j$. Cette matrice est associée au r-tournoi transitif.

Disons qu'une matrice $B = (b_{ij})$ à p lignes et q colonnes, à coefficients dans $\{-1, 1\}$ est en tableau de Young, si elle vérifie les deux conditions

i) pour tout i, la suite $(b_{ij})_j$ est décroissante.

ii) pour tout j, la suite $(b_{ij})_i$ est croissante.

Avec ces notations, la matrice du tournoi localement transitif $\mathcal{T}_\varphi$ associé à une application croissante $\varphi : \{1, ..., m - s - 1\} \rightarrow \{m - s, ..., m\}$ est :

$$mat(\mathcal{T}_\varphi, (x_1, ..., x_m)) = \begin{pmatrix} T_{m-s} & B \\ -B^t & T_s \end{pmatrix}$$

où B est en tableau de Young.

Alors le procédé de la proposition 3 donne :

$$mat(\mathcal{T}_\psi, (y_0, ..., y_{m+1})) = \begin{pmatrix} T_{m-s+1} & B' \\ -\,{}^tB' & T_{s+1} \end{pmatrix}$$

où $B' = \begin{pmatrix} -1 & C \\ -{}^tC & B \end{pmatrix}$, $C = (-1 \ ... -1)$.

Quant au procédé de la proposition 6; il donne :

$$mat(\mathcal{T}_\psi, (y_{-1}, ..., y_m)) = \begin{pmatrix} T_{m-s+2} & B' \\ -\,{}^tB' & T_s \end{pmatrix}, \qquad \text{où } B' = \begin{pmatrix} -1 - 1 \ ... \ -1 \\ B \\ 1\ 1 \ .... \ 1 \end{pmatrix}$$

Notons que l'association entre tournois localement transitifs (pointés) et fonctions croissantes (cf.[1]) se traduit par :

1) Une matrice en blocs $\begin{pmatrix} T_p & B \\ -\,{}^tB & T_q \end{pmatrix}$ est la matrice d'incidence d'un tournoi l.t. si et seulement si B est en tableau de Young.

2) Une matrice $A = (a_{i,j})$ est la matrice d'un tournoi l.t si et seulement si il existe une matrice de permutation P telle que PAP^{-1} soit une matrice en blocs

$$\begin{pmatrix} T_p & B \\ -\,{}^tB & T_q \end{pmatrix}$$

où B est en tableau de Young.

Exemple 11 *Considérons la matrice :*

$$mat(\mathcal{T},(x_1,...,x_5)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le score du tournoi associé est : $[1,1,2,3,3]$; il est connexe et symétrique. Pointons $\mathcal{T}$ en x_3. On voit que $(x_3)_+ = \{x_1\}$ et que :

$$mat(\mathcal{T},(x_2,x_4,x_5)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $(x_3)_-$ est transitif et que : $x_4 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_5$.
On a :

$$mat(\mathcal{T},(x_4,x_2,x_5,x_3,x_1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_4 & B \\ -{}^tB & T_1 \end{pmatrix}$$

avec ${}^tB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ce qui montre que $\mathcal{T}$ est localement transitif.

References

1. A. Belkilani, R. Ouannas, *Construction des tournois localement transitifs. Symétries et périodicité. Communications in Mathematical Analysis. Vol 3, N°* 2, pp 69-82, 2007.

2. N. Cohen, M. Paredes, S. Pinzon, Locally transitive tournaments and the classification of (1,2)-symplectic metrics on maximal flag manifolds. Illinois J. Math. 48 no. 4 (2004), 1405-1415.