# Les graphes (-1)-critiques

Houmem Belkhechine
Faculté des Sciences de Gabès
Tunisie
houmem@gmail.com

Imed Boudabbous
Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax
Tunisie
imed.boudabbous@gmail.com

Mohamed Baka Elayech
Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax
Tunisie
mohamedbaka.elayech@gmail.com

**Résumé**

*Étant donné un graphe (orienté) $G = (S, A)$, une partie $X$ de $S$ est un intervalle de $G$ lorsque pour tous $a, b \in X$ et $x \in S - X$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$ et $(x, a) \in A$ si et seulement si $(x, b) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ ($x \in S$) et $S$ sont des intervalles de $G$, appelés intervalles triviaux. Un graphe, dont tous les intervalles sont triviaux, est indécomposable ; sinon, il est décomposable. Un sommet $x$ d'un graphe indécomposable $G$ est critique si le graphe $G - x$ est décomposable. En 1993, J.H. Schmerl et W.T. Trotter ont caractérisé les graphes indécomposables dont tous les sommets sont critiques, appelés graphes critiques. Dans cet article, nous caractérisons les graphes indécomposables qui admettent un unique sommet non critique, que nous appelons graphes (-1)-critiques.* Nous répondons ainsi à une question posée par Y. Boudabbous et P. Ille dans un article récent étudiant les sommets critiques dans un graphe indécomposable.

**Abstract**

**The (-1)-critical graphs.** *Given a (directed) graph $G = (V, A)$, a subset $X$ of $V$ is an interval of $G$ provided that for any $a, b \in X$ and $x \in V - X$, $(a, x) \in A$ if and only if $(b, x) \in A$ and $(x, a) \in A$ if and* *only if $(x, b) \in A$. For example, $\emptyset$, $\{x\}$ $(x \in V)$ and $V$ are intervals of $G$, called trivial intervals. A graph, all the intervals of which are trivial, is indecomposable; otherwise, it is decomposable. A vertex $x$ of an indecomposable graph is critical if $G - x$ is decomposable. In 1993, J.H. Schmerl and W.T. Trotter characterized the indecomposable graphs, all the vertices of which are critical, called critical graphs. In this article, we characterize the indecomposable graphs which admit a single non critical vertex, that we call (-1)-critical graphs.* This gives an answer to a question asked by Y. Boudabbous and P. Ille in a recent article studying the critical vertices in an indecomposable graph.

**Mots clés:** intervalle, graphe indécomposable, sommet critique, graphe (-1)-critique, graphe d'indécomposabilité.

# 1 Introduction

## 1.1 Généralités

Un *graphe* (*orienté*) $G = (S(G), A(G))$ ou $(S, A)$, est constitué d'un ensemble fini $S$ de *sommets* et d'un ensemble $A$ de couples de sommets distincts, appelés *arcs* de $G$. L'*ordre* (ou le *cardinal*) du graphe $G$ est le nombre de ses sommets. Soit $G = (S, A)$ un graphe. À chaque partie $X$ de $S$ est associé le *sous-graphe* $G(X) = (X, A \cap (X \times X))$ de $G$ *induit* par $X$. Pour $X \subseteq S$ (resp. $x \in S$), le graphe $G(S - X)$, où $S - X = \{s \in S : s \notin X\}$, (resp. $G(S - \{x\})$) est noté $G - X$ (resp. $G - x$). Pour tous sommets distincts $x, y$ de $S$, $x \longleftrightarrow y$ signifie $(x, y) \in A$ et $(y, x) \in A$ ; $x - - y$ signifie $(x, y) \notin A$ et $(y, x) \notin A$ ; $x \longrightarrow y$ signifie $(x, y) \in A$ et $(y, x) \notin A$. Pour $x \in S$ et $Y \subseteq S$, $x \longrightarrow Y$ signifie $x \longrightarrow y$ pour tout $y \in Y$. Pour $X, Y \subseteq S$, $X \longrightarrow Y$ signifie $x \longrightarrow Y$ pour tout $x \in X$. D'une manière analogue, on définit pour $x \in S$ et pour $X, Y \subseteq S$, $Y \longleftrightarrow x$, $x - - Y$, $X \longleftrightarrow Y$ et $X - - Y$. Par exemple un *tournoi* $T$ est un graphe tel que pour tous $x \neq y$ dans $S(T)$, ou bien $x \longrightarrow y$ ou bien $y \longrightarrow x$. Un tournoi $T$ est un *ordre total* (ou une *chaîne*), lorsque pour tous $x, y, z \in S(T)$, si $x \longrightarrow y$ et $y \longrightarrow z$, alors $x \longrightarrow z$. Dans un ordre total, la notation $x < y$ signifie $x \longrightarrow y$. L'ordre total usuel $0 < \cdots < n$ est noté $O_n$.

Un graphe *symétrique* est un graphe $G$ tel que pour tous $x \neq y$ dans $S(G)$, si $(x, y) \in A(G)$, alors $(y, x) \in A(G)$. Étant donné un sommet $x$ d'un graphe symétrique $G$, un sommet $y \in S(G)$ est un *voisin* de $x$ (dans $G$), si $(x, y) \in A(G)$. On note $V_G(x)$ l'ensemble des voisins de $x$ dans $G$. le degré de $x$ est $d_G(x) = | V_G(x) |$. Lorsque $V_G(x) = \emptyset$, on dit que $x$ est un sommet *isolé* de $G$. Un graphe symétrique $G$ est *complet* (resp. *vide*) lorsque pour tous $x \neq y$ dans $S(G)$, $(x, y) \in A(G)$ (resp. $(x, y) \notin A(G)$).

Étant donné un graphe symétrique $G$, une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est définie sur $S(G)$ comme suit. Pour tous $x \neq y$ dans $S(G)$, $x \mathcal{R} y$ s'il existe une suite $x_0 = x, \cdots, x_n = y$ de sommets de $G$ telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A(G)$. Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont les *composantes connexes* de $G$. Le graphe $G$ est *connexe* lorsqu'il admet une seule composante connexe.

Étant donnés deux graphes $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$, une bijection $f$ de $S$ sur $S'$ est un *isomorphisme* de $G$ sur $G'$ si pour tous $x$, $y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que $G$ et $G'$ sont *isomorphes*, et on note $G \simeq G'$. On dit qu'un graphe $G$ *abrite* un graphe $H$ lorsque $H$ est isomorphe à un sous- graphe de $G$.

À chaque graphe $G$ est associé son *dual* $G^\star$ et son *complémentaire* $\overline{G}$ définis sur $S(G)$ comme suit : pour tous $x \neq y$ dans $S(G)$, $(x, y) \in A(G^\star)$ si $(y, x) \in A(G)$ ; $(x, y) \in A(\overline{G})$ si $(x, y) \notin A(G)$. Un graphe $G$ est *autodual* lorsqu'il est isomorphe à $G^\star$.

## 1.2 Graphes indécomposables

Étant donné un graphe $G = (S, A)$, on introduit une relation d'équivalence $\equiv_G$ (ou $\equiv$) sur l'ensemble des couples de sommets distincts de $G$, définie comme suit : pour $x \neq y$ dans $S$ et $u \neq v$ dans $S$, $(x, y) \equiv_G (u, v)$ (ou $(x, y) \equiv (u, v)$ ) si $x \longrightarrow y$ et $u \longrightarrow v$, ou bien $y \longrightarrow x$ et $v \longrightarrow u$, ou bien $x \longleftrightarrow y$ et $u \longleftrightarrow v$, ou bien $x - - y$ et $u - - v$. Dans le cas contraire on note $(x, y) \not\equiv_G (u, v)$ (ou $(x, y) \not\equiv (u, v)$). Pour $x \in S$ et $Y \subseteq S - \{x\}$, $x \sim Y$ signifie que pour tous $y$, $z \in Y$, $(x, y) \equiv (x, z)$. Pour $X, Y \subseteq S$, avec $X \cap Y = \emptyset$, $X \sim Y$ signifie que pour tous $x$, $x' \in X$ et pour tous $y$, $y' \in Y$, $(x, y) \equiv (x', y')$. Par ailleurs, une partie $I$ de $S$ est un *intervalle* [5, 6, 8] (ou un *clan* [4]) de $G$ lorsque pour tout $x \in S - I$, $x \sim I$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ où $x \in S$, et $S$ sont les intervalles *triviaux* de $G$. Un graphe est *indécomposable* [6, 8] (ou *primitif* [4] ) si tous ses intervalles sont triviaux ; il est *décomposable* dans le cas contraire. Nous introduisons quelques notations et nous rappelons quelques propriétés des graphes indécomposables.

**Définition 1.1.** *Soit $G = (S, A)$ un graphe. À toute partie $X$ de $S$ telle que $|X| \geq 3$ et $G(X)$ est indécomposable, on associe les parties de $S - X$ suivantes :*

- $[X] = \{x \in S - X : X$ *est un intervalle de* $G(X \cup \{x\})\}$.
- *Pour tout* $u \in X$, $X(u) = \{x \in S - X :\ \{u, x\}$ *est un intervalle de* $G(X \cup \{x\})\}$.
- $Ext(X) = \{x \in S - X :\ G(X \cup \{x\})$ *est indécomposable*$\}$.

*La classe formée par $Ext(X)$, $[X]$ et $X(u)$, où $u \in X$, est notée $p_X$.*

**Lemme 1.2.** *[4] Soient $G = (S, A)$ un graphe et $X$ une partie de $S$ tels que $| X | \geq 3$ et $G(X)$ est indécomposable. La classe $p_X = \{X(u) : u \in X\} \cup \{Ext(X), [X]\}$ forme une partition de $S - X$. De plus, les assertions suivantes sont vérifiées.*

- *Soient $u \in X$, $x \in X(u)$ et $y \in S - (X \cup X(u))$. Si $G(X \cup \{x, y\})$ est décomposable, alors $\{u, x\}$ est un intervalle de $G(X \cup \{x, y\})$.*
- *Soient $x \in [X]$ et $y \in S-(X \cup [X])$. Si $G(X \cup \{x, y\})$ est décomposable, alors $X \cup \{y\}$ est un intervalle de $G(X \cup \{x, y\})$.*
- *Soient $x \neq y$ dans $Ext(X)$. Si $G(X \cup \{x, y\})$ est décomposable, alors $\{x, y\}$ est un intervalle de $G(X \cup \{x, y\})$.*

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 1.2.

**Corollaire 1.3.** *[4] Soit $G = (S, A)$ un graphe indécomposable. Si $X$ est une partie de $S$ telle que $| X | \geq 3$, $| S - X | \geq 2$ et $G(X)$ est indécomposable, alors il existe deux sommets distincts $x$ et $y$ de $S - X$ tels que $G(X \cup \{x, y\})$ est indécomposable.*

Rappelons enfin le lemme suivant.

**Lemme 1.4.** *[7] Si $G = (S, A)$ est un graphe indécomposable avec $| S | \geq 5$ et si $a \in S$, alors il existe une partie $X$ de $S$ telle que $| X | = 4$ ou $5$, $a \in X$ et $G(X)$ est indécomposable.*

## 1.3 Graphes critiques

Soit $G$ un graphe indécomposable. Un sommet $x$ de $G$ est *critique* si le graphe $G - x$ est décomposable. Lorsque tous les sommets de $G$ sont critiques, on dit que $G$ est un *graphe critique.* On généralise cette définition en disant que le graphe $G$ est *(-k)-critique* lorsqu'il admet exactement $k$ sommets non critiques. Notons que si un graphe $G$ est indécomposable, alors $G^\star$ et $\overline{G}$ sont aussi indécomposables et ils ont les mêmes sommets critiques que $G$. Lorsqu'un sommet $a$ est l'unique sommet non critique d'un graphe (-1)-critique $G$, on dit que le graphe $G$ est (-1)-critique en $a$. J.H. Schmerl et W.T. Trotter [8] ont caractérisé les graphes critiques. Nous rappelons cette caractérisation dans le cas des tournois. Pour tout entier naturel $m$, nous posons $N_m = \{0, \cdots, m\}$. Les tournois critiques sont, à des isomorphismes près, les tournois $T_{2n+1}$, $U_{2n+1}$ et $V_{2n+1}$ définis sur $N_{2n}$, où $n \geq 2$, comme suit.

- $T_{2n+1}(N_n) = 0 < \cdots < n$, $T_{2n+1}(\{n+1, \cdots, 2n\}) = n+1 < \cdots < 2n$, et pour tout $i \in N_{n-1}$, $\{i+1, \ldots, n\} \longrightarrow i+n+1 \longrightarrow N_i$.
- $U_{2n+1}(N_n) = 0 < \cdots < n$, $(U_{2n+1})^\star(\{n+1, \cdots, 2n\}) = n+1 < \cdots < 2n$, et pour tout $i \in N_{n-1}$, $\{i+1, \ldots, n\} \longrightarrow i+n+1 \longrightarrow N_i$.
- $V_{2n+1}(N_{2n-1}) = 0 < \cdots < 2n-1$ et $\{2i+1 : 0 \leq i \leq n-1\} \longrightarrow 2n \longrightarrow \{2i : 0 \leq i \leq n-1\}$.

Dans cet article, nous caractérisons les graphes (-1)-critiques, répondant ainsi, à une question posée par Y. Boudabbous et P. Ille [3], et généralisant une récente caractérisation des tournois (-1)-critiques [1].

# 2 Caractérisation des graphes (-1)-critiques

## 2.1 Graphe d'indécomposabilité

La notion de *graphe d'indécomposablité* a été introduite par P. Ille [2, 7]. À chaque graphe $G = (S, A)$ est associé son graphe d'indécomposabilité $I(G)$ défini sur $S$ comme suit. Pour tous $x \neq y$ dans $S$, $(x, y)$ est un arc de $I(G)$ si $G - \{x, y\}$ est indécomposable. Notons que $I(G)$ est un graphe symétrique et que $I(\overline{G}) = I(G^\star) = I(G)$. Nous rappelons le lemme suivant.

**Lemme 2.1.** *[3] Soient $G = (S, A)$ un graphe indécomposable d'ordre $\geq 5$ et $x$ un sommet critique de $G$. Alors $\mid V_{I(G)}(x) \mid \leq 2$ et on a :*

- *Si $V_{I(G)}(x) = \{y\}$, où $y \in S$, alors $S - \{x, y\}$ est un intervalle de $G - x$.*
- *Si $V_{I(G)}(x) = \{y, z\}$, où $y \neq z$ dans $S$, alors $\{y, z\}$ est un intervalle de $G - x$.*

Le graphe d'indécomposabilité est un outil important dans notre construction des graphes (-1)-critiques. Afin de décrire les différents graphes d'indécomposabilité possibles d'un graphe (-1)-critique, nous introduisons les graphes suivants. Le *chemin* $P_n$ est le graphe symétrique défini sur $N_n$ comme suit : Pour tous $i, j \in N_n$, $i \longleftrightarrow j$ si $\mid i - j \mid = 1$. Pour $n \geq 2$, le *cycle* $C_n$ est le graphe symétrique obtenu à partir de $P_n$ en ajoutant les arcs $(0, n)$ et $(n, 0)$. Tout graphe isomorphe à $P_n$ (resp. $C_n$) est appelé chemin (resp. cycle). La *longueur* d'un chemin, ou d'un cycle, est le nombre de paires $\{x, y\}$ de ses sommets tels que $x \longleftrightarrow y$. Les *extrémités* (resp. sommets *internes*) d'un chemin sont ses sommets de degré 1 (resp. de degré 2). Un *arbre* est un graphe symétrique connexe sans cycle. Les *feuilles* d'un arbre sont ses sommets de degré 1. Un arbre *étoilé* est un arbre $\mathcal{A}$ admettant un unique sommet $a$ tel que $d_{\mathcal{A}}(a) \geq 3$, appelé *source* de $\mathcal{A}$. Un arbre *a-étoilé* est un arbre étoilé de source $a$. Étant donné un arbre étoilé $\mathcal{A}$, une *branche* de $\mathcal{A}$ est un chemin de $\mathcal{A}$ dont les extrémités sont la source et une feuille. Le degré de $\mathcal{A}$ est le degré de sa source, ou encore le nombre de ses branches ou de ses feuilles. Nous considérons enfin le graphe $R_{2n+1}$ défini sur $N_{2n}$, où $n \geq 2$, comme suit : $\{1, 3, \cdots, 2n-1\} \longrightarrow 2n \longrightarrow \{0, 2, \cdots, 2n-2\}$ et pour tous $x \neq y \in N_{2n-1}$, $(x, y)$ est un arc de $R_{2n+1}$ si $x < y$ et si $x$ est impair ou $y$ est pair.

**Remarque 2.2.** *[3] Le graphe $R_{2n+1}$, où $n \geq 2$, est autodual et (-1)-critique en $2n$. De plus, $I(R_{2n+1}) - 2n = P_{2n-1}$ et $2n$ est un sommet isolé* de $I(R_{2n+1})$.

**Lemme 2.3.** *[3] Le graphe d'indécomposabilité d'un graphe $G$ d'ordre $\geq 7$ et (-1)-critique en $a$, admet une unique composante connexe de cardinal $\geq 2$. De plus, si $a$ est un sommet isolé de $I(G)$, alors $G$ est isomorphe à $R_{2n+1}$ ou à $\overline{R_{2n+1}}$.*

Nous complétons ce lemme comme suit.

**Corollaire 2.4.** *Soit $G$ un graphe d'ordre $\geq 7$, (-1)-critique en $a$ et tel que $a$ n'est pas un sommet isolé de $I(G)$. Soit $C$ la composante connexe non réduite à un singleton de $I(G)$ et soit $X$ une partie de $S(G)$ telle que $G(X)$ est indécomposable. Si $C \subseteq X$, alors $S(G) = X$.*

*Preuve.* Par l'absurde, supposons $S(G) \neq X$. En appliquant plusieurs fois le corollaire 1.3 à partir de $G(X)$, on obtient deux sommets, distincts ou non, $x, y \in S(G) - C$ tels que $G - \{x, y\}$ est indécomposable. Si $x = y$, $x$ est un sommet non critique de $G$, contradiction car $a$ est l'unique sommet non critique de $G$. Si $x \neq y$, $(x, y)$ est un arc de $I(G)$, contradiction car $x$ et $y$ sont des sommets isolés de $I(G)$. □

Ces résultats nous amènent à associer à chaque graphe (-1)-critique $G$ d'ordre $\geq 7$, le sous-graphe $I'(G)$ de $I(G)$, induit par sa composante connexe non réduite à un singleton.

**Proposition 2.5.** *Étant donné un graphe $G$ d'ordre $\geq 7$ et (-1)-critique en $a$, l'une des assertions suivantes est vérifiée :*
- *$I(G)$ est un cycle de longueur impaire.*
- *$I'(G)$ est un chemin de longueur $\geq 2$.*
- *$I'(G)$ est un arbre $a$-étoilé dont toutes les branches sont de longueurs $\geq 2$ et admettant au plus une branche de longueur impaire, et alors cette branche est de longueur $\geq 3$.*

*Preuve.* Soit $G$ un graphe d'ordre $\geq 7$ et (-1)-critique en $a$. Si $a$ est un sommet isolé de $I(G)$ alors, d'après le lemme 2.3, $G$ est isomorphe à $R_{2n+1}$ ou à $\overline{R_{2n+1}}$ et, d'après la remarque 2.2, $I'(G)$ est un chemin de longueur $\geq 5$. Si $a$ n'est pas un sommet isolé de $I(G)$ alors $a$ est un sommet de $I'(G)$. Supposons d'abord que $I(G)$ abrite un cycle. Il existe alors une partie $X$ de $S(G)$ telle que $I(G)(X)$ est un cycle. Posons $I(G)(X) = C_m$, où $m \geq 2$. Le sommet $a$ appartient à $X$, sinon il existe un sommet $\alpha \in X$ tel $d_{I(G)}(\alpha) \geq 3$. Comme $\alpha$ est un sommet critique de $G$, ceci contredit le lemme 2.1. On peut alors supposer que $a = 0$. D'après le lemme 2.1, $\{0, m-1\}$ est un intervalle de $G - m$. On a $m$ est pair, autrement, par le lemme 2.1, $\{i, i+2\}$ est un intervalle de $G - \{i+1\}$ pour tout $i \in \{0, \cdots, m-3\}$, par suite $(m, 0) \equiv (m, 2) \equiv \cdots \equiv (m, m-1)$. Ainsi $\{0, m-1\}$ est un intervalle non trivial de $G$, contradiction. De plus, $S - X = \emptyset$, sinon un raisonnement analogue au précédent utilisant le lemme 2.1 donne pour tout $\alpha \in S - X$, $(\alpha, 1) \equiv (\alpha, 3) \equiv \cdots \equiv (\alpha, m-1) \equiv (\alpha, 0) \equiv (\alpha, 2) \equiv \cdots \equiv (\alpha, m)$. Ainsi $X$ est un intervalle non trivial de $G$, contradiction. Il s'ensuit que $I(G)$ est un cycle de longueur impaire. Supposons à présent que $I(G)$ n'abrite pas un cycle, c'est-à-dire que $I'(G)$ est un arbre. Si $d_{I(G)}(a) \leq 2$ (resp. $d_{I(G)}(a) \geq 3$) alors, d'après le lemme 2.1, $I'(G)$ est un chemin (resp. un arbre étoilé de source $a$). Supposons d'abord que $I'(G)$ est un chemin. D'après le lemme 1.4, il existe une partie $X$ de $S(G)$ telle que $\mid X \mid = 4$ ou 5, $a \in X$ et $G(X)$ est indécomposable. En appliquant plusieurs fois le corollaire 1.3 à partir de $G(X)$, on obtient deux sommets $x, y \in S(G)$ tels que $G - \{x, y\}$ est indécomposable. Puisque $x$ est un sommet critique de $G$, alors $x \neq y$. Il s'ensuit que $(x, y)$ est un arc de $I'(G)$. Comme de plus $a$ n'est pas un sommet isolé de $I(G)$, alors le chemin $I'(G)$ est de longueur $\geq 2$. Nous posons maintenant, pour tous entiers $h$, $l \geq 1$, $S_{h_l} = \{h_0, \cdots, h_l\}$, $h_0 = a = 0$, et nous notons par $P_{h_l}$ le chemin défini sur $S_{h_l}$ par $A(P_{h_l}) = \{(h_u, h_v) :\mid u - v \mid = 1\}$. Supposons par l'absurde que $I'(G)$ est un arbre étoilé admettant deux branches distinctes $P_{1_{2p+1}}$ et $P_{2_{2q+1}}$ de longueurs impaires, où $p, q \in \mathbb{N}$. Une suite d'applications du lemme 2.1 donne $(0, 1_1) \equiv (0, 1_{2p+1}) \equiv (1_{2p}, 1_{2p+1}) \not\equiv (1_{2p}, 2_1) \equiv (0, 2_1)$. Soit $x \in S(G) - (S_{1_{2p+1}} \cup S_{2_{2q+1}})$. Encore par le lemme 2.1, $(0, x) \equiv (1_{2p}, x) \equiv (1_{2p}, 2_1) \equiv (0, 2_1)$. Ainsi $(0, x) \equiv (0, 2_1)$. De même, $(0, x) \equiv (0, 1_1)$. Contradiction car $(0, 1_1) \not\equiv (0, 2_1)$. Supposons que $I'(G)$ est un arbre 0-etoilé admettant une branche $P_{1_1}$ de longueur 1. Considérons deux autres branches distinctes $P_{2_{2r}}$ et $P_{3_{2s}}$ de $I'(G)$ où $r$, $s \in \mathbb{N}^*$. D'après le lemme 2.1, $0 \sim (S - \{0, 1_1\})$, et pour tous $x \in S - (\{1_1\} \cup S_{2_{2r}})$, $l \in \{1, \cdots, r\}$, on a $(2_{2l}, x) \equiv (0, x) \equiv (0, 3_{2s-1}) \equiv (2_{2r-1}, 3_{2s-1}) \equiv (2_{2r-1}, x) \equiv (2_{2l-1}, x)$. Il s'ensuit que $S_{2_{2r}} - \{0\}$ est un intervalle non trivial du graphe indécomposable $G - \{0, 1_1\}$, contradiction. D'où, si elle existe, la branche de longueur impaire de $I'(G)$ est de longueur $\geq 3$. □

La proposition 2.5 nous amène à la distinction suivante des graphes (-1)-critiques.

## 2.2 Les graphes (-1)-critiques $G$ tels que $I(G)$ est un cycle

Pour tout entier $p \geq 1$, nous considérons le graphe $H_{2p+1}$ défini sur $N_{2p}$ comme suit : pour tous $x \neq y \in N_{2p}$ , $(x, y)$ est un arc de $H_{2p+1}$ si : ou bien $x < y$, $x$ est pair et $y$ est impair ; ou bien $x > y$ et $x$ et $y$ sont de même parité. Notons que $H_{2p+1}$ est autodual en considérant la permutation $\sigma$ définie par $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(i) = 2p + 1 - i$ pour $i \neq 0$.

**Proposition 2.6.** *À des isomorphismes près, les graphes (-1)-critiques d'ordre $\geq 7$ et dont le graphe d'indécomposabilité est un cycle sont $H_{2p+1}$*

*et* $\overline{H_{2p+1}}$, *où* $p \geq 3$. *De plus,* $0$ *est le sommet non critique de* $H_{2p+1}$.

*Preuve*. Nous commençons par établir que pour tout $p \geq 2$, $H_{2p+1}$ est (-1)-critique en $0$ et que $I(H_{2p+1}) = C_{2p+1}$. Montrons d'abord, par récurrence, que pour tout $p \geq 1$, $H_{2p+1}$ est indécomposable. Il est clair que $H_3$ est indécomposable. Soit maintenant $p \geq 2$. Le graphe $H_{2p-1}$ étant indécomposable par hypothèse de récurrence, on vérifie que $H_{2p+1}$ est indécomposable en considérant la partition $p_W$, où $W = S(H_{2p-1})$. Il suffit de constater que $2p \in W(2p-2)$, $2p-1 \notin W(2p-2)$ et $(2p-1, 2p) \not\equiv (2p-1, 2p-2)$. Tout sommet $i \neq 0$ de $H_{2p+1}$ est critique car $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle non trivial de $H_{2p+1} - i$. En remarquant que $H_{2p+1} - \{0,1\} \simeq H_{2p-1}$, nous vérifions maintenant que $H_{2p+1} - 0$ est indécomposable en considérant la partition $p_Y$, où $Y = \{2, \cdots, 2p\}$. D'une part $1 \notin [Y]$ car $2 - -1$ et $3 \longrightarrow 1$. D'autre part, pour tout $u \in Y$, $1 \notin Y(u)$. En effet, $(2p-1, 1) \not\equiv (2p-1, u)$ si $u$ est pair ; $2 \longrightarrow u$ et $2 - -1$ si $u$ est impair. Il s'ensuit, d'après le lemme 1.2, que $1 \in Ext(Y)$, c'est-à-dire $0$ est un sommet non critique de $H_{2p+1}$. Pour vérifier que $I(H_{2p+1}) = C_{2p+1}$, il suffit, d'après la proposition 2.5, de vérifier que pour tout $i \in N_{2p}$, $H_{2p+1} - \{i, i+1\}$ est indécomposable. Pour tout $i \in N_{2p-1}$, $H_{2p+1} - \{i, i+1\} \simeq H_{2p-1}$. De plus, $H_{2p+1} - \{2p, 0\} \simeq H_{2p-1}$. Comme $H_{2p-1}$ est indécomposable, il s'ensuit que $I(H_{2p+1}) = C_{2p+1}$.

Soit maintenant un graphe (-1)-critique $G$ d'ordre $\geq 7$ et dont le graphe d'indécomposabilité est un cycle. D'après la proposition 2.5, le graphe $G$ est de cardinal impair. On pose alors $S(G) = N_{2p}$, où $p \geq 3$, $0$ est le sommet non critique de $G$ et $I(G) = C_{2p}$. D'aprés le lemme 2.1, pour tout $i \in \{1, \cdots, 2p\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$, alors $(0,1) \equiv (0,3) \equiv \cdots \equiv (0, 2p-1) \equiv (2, 2p-1) \equiv \cdots \equiv (2p-2, 2p-1) \equiv (2p-2, 0) \equiv (2p, 0)$. Il s'ensuit que $(0,1) \not\equiv (0, 2p)$, autrement $(0,1) \equiv (0,3) \equiv \cdots \equiv (0, 2p-1) \equiv (0, 2p) \equiv (0, 2p-2) \equiv \cdots \equiv (0,2)$, c'est-à-dire $\{1, \cdots, 2p\}$ est un intervalle non trivial de $G$, contradiction. Ainsi $(0,1) \not\equiv (1,0)$ et quitte à remplacer $G$ par $G^\star$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1$ et donc $2p \longrightarrow 0$. Pour $i \leq j$ dans $N_{p-1}$, $2i \longrightarrow 2j+1$ car $0 \longrightarrow 1$ et $(2i, 2j+1) \equiv \cdots \equiv (0, 2j+1) \equiv \cdots \equiv (0,1)$. Pour $i < j$ dans $N_p$, $2j \longrightarrow 2i$ car $2p \longrightarrow 0$ et $(2j, 2i) \equiv \cdots \equiv (2p, 2i) \equiv \cdots \equiv (2p, 0)$. Pour $i < j$ dans $N_{p-1}$, $2j+1 \longrightarrow 2i+1$ car $0 \longrightarrow 1$ et $(2j+1, 2i+1) \equiv \cdots \equiv (2p-1, 2i+1) \equiv \cdots \equiv (2p-1, 1) \equiv (0,1)$. Pour $i < j$ dans $N_p$, $(2i+1, 2j) \equiv \cdots \equiv (1, 2j) \equiv \cdots \equiv (1,2)$, en particulier $(2i+1, 2p) \equiv (1,2)$. Or $(1,2) \equiv (2,1)$ sinon, comme $0 \longrightarrow 1$ et $\{0,2\}$ est un intervalle de $G - 1$ et n'est pas un intervalle de $G$, alors $1 \longrightarrow 2$, il s'ensuit que pour tout $i \in \{1, \cdots, p-1\}$, $2i+1 \longrightarrow \{1, 2p\} \longrightarrow 2i$, en particulier $\{1, 2p\}$ est un intervalle non trivial de $G - 0$. Contradiction. Ainsi, ou bien $1 - -2$ et dans ce cas $G = H_{2p+1}$, ou bien $1 \longleftrightarrow 2$ et dans ce cas $G = (\overline{H_{2p+1}})^\star \simeq \overline{H_{2p+1}}$. □

## 2.3 Les graphes (-1)-critiques $G$ tels que $I'(G)$ est un chemin

Nous construisons les graphes (-1)-critiques $G$ de ce paragraphe sur $S(G) = N_m$, $N_m \cup \{\alpha\}$ ou $N_m \cup \{\alpha, \beta\}$, où $\{\alpha, \beta\}$ est une paire d'éléments distincts tels que $\{\alpha, \beta\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

Le corollaire suivant découle directement de la remarque 2.2 et du lemme 2.3.

**Corollaire 2.7.** *À des isomorphismes près, les graphes $G$ d'ordre $\geq 7$, (-1)-critiques en $a$ et tels que $I'(G)$ est un chemin et $a$ est un sommet isolé de $I(G)$, sont $R_{2n+1}$ et $\overline{R_{2n+1}}$, où $n \geq 3$.*

Nous distinguons maintenant les cas où le sommet non critique est une extrémité ou un sommet interne de $I'(G)$.

### 2.3.1 Les graphes (-1)-critiques $G$ en une extrémité de $I'(G)$

Nous introduisons, pour $m \geq 2$, la classe $\mathcal{F}_m$ des graphes $G$ définis sur $N_m$ et tels que $N_m - \{0, 1\}$ est un intervalle de $G - 0$ et pour tout $i \in \{1, \cdots, m-1\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$ sans être un intervalle de $G$. Notons d'abord la remarque suivante.

**Remarque 2.8.** *Soit $G \in \mathcal{F}_m$, où $m \geq 2$. Pour tout $i \in N_{m-1}$, $G - \{i, i+1\} \simeq G - \{m-1, m\}$. De plus, si $m \geq 3$, $G - m \in \mathcal{F}_{m-1}$.*

Nous caractérisons la classe $\mathcal{F}_m$ comme suit.

**Lemme 2.9.** *Étant donné un graphe $G$ défini sur $N_m$, où $m \geq 2$. Alors $G \in \mathcal{F}_m$ si et seulement si $(0,1) \not\equiv (2,1)$ et pour tous $x < y$ dans $N_m$, $(x, y) \equiv (1,2)$ si $x$ est impair, $(x,y) \equiv (0,2)$ si $x$ et $y$ sont pairs, et $(x,y) \equiv (0,1)$ si $x$ est pair et $y$ est impair.*

*Preuve.* Soit $G \in \mathcal{F}_m$, où $m \geq 2$. On a $(0,1) \not\equiv (2,1)$ car $\{0,2\}$ est un intervalle de $G - 1$ et n'est pas un intervalle de $G$. Soit $x < y$ dans $N_m$. Pour $y \neq 1$, $(1, y) \equiv (1,2)$ car $N_m - \{0,1\}$ est un intervalle de $G - 0$. Comme de plus pour tout $i \in \{1, \cdots, m-1\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$, alors $(1,2) \equiv (1,y) \equiv \cdots \equiv (x,y)$ si $x$ est impair ; $(0,1) \equiv \cdots \equiv (0,y) \equiv \cdots \equiv (x,y)$ si $x$ est pair et $y$ est impair, et $(0,2) \equiv \cdots \equiv (0,y) \equiv \cdots \equiv (x,y)$ si $x$ et $y$ sont pairs.

Réciproquement, soit $i \in \{1, \cdots, m-1\}$. Remarquons que pour $x \in N_m - \{i-1, i, i+1\}$, $(x, i-1) \equiv (x, i+1)$, de sorte que $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$. Si $i$ est pair (resp. impair), alors $(i-1, i) \equiv (1,2)$ et $(i+1, i) \equiv (1,0)$ (resp. $(i-1, i) \equiv (0,1)$ et $(i+1, i) \equiv (2,1)$). Puisque $(0,1) \not\equiv (2,1)$, $(i, i-1) \not\equiv (i, i+1)$ et par suite $\{i-1, i+1\}$ n'est pas un intervalle de $G$. Enfin, $N_m - \{0,1\}$ est un intervalle de $G-0$ car pour tout $y \in N_m - \{0,1\}$, $(1,y) \equiv (1,2)$. □

Le résultat suivant caractérise les graphes indécomposables de $\mathcal{F}_m$.

**Lemme 2.10.** *Soit $G \in \mathcal{F}_m$, où $m \geq 2$. Alors $G$ est indécomposable si et seulement si ou bien $m$ est pair et $(0,1) \not\equiv (0,2) \not\equiv (1,2)$, ou bien $m$ est impair et $(0,2) \not\equiv (0,1) \not\equiv (1,2)$.*

*Preuve.* Soit $G \in \mathcal{F}_m$. On suppose que $(0,1) \not\equiv (0,2) \not\equiv (1,2)$ lorsque $m$ est pair, et que $(0,2) \not\equiv (0,1) \not\equiv (1,2)$ lorsque $m$ est impair. Montrons, par récurrence sur $m$, que $G$ est indécomposale. En utilisant le lemme 2.9, on vérifie que $G$ est indécomposable pour $m = 2$ et pour $m = 3$. Soit $m \geq 4$. D'après la remarque 2.8, $G(N_{m-2}) \in \mathcal{F}_{m-2}$. Il s'ensuit que $G(N_{m-2})$ est indécomposable par hypothèse de récurrence. Comme $m \in N_{m-2}(m-2)$, $m-1 \notin N_{m-2}(m-2)$ et $(m-1, m-2) \not\equiv (m-1, m)$, alors $G$ est indécomposable d'après le lemme 1.2. Réciproquement, si $m$ est pair et si $(0,2) \equiv (0,1)$ ou $(0,2) \equiv (1,2)$ (resp. si $m$ est impair et si $(0,1) \equiv (0,2)$ ou $(0,1) \equiv (1,2)$), on vérifie que $\{1, 2, \cdots, m\}$ ou $N_{m-1}$ est un intervalle non trivial de $G$. □

Afin de caractériser les graphes (-1)-critiques de ce paragraphe, nous introduisons la classe $\mathcal{F}$ des graphes $G = (S, A)$ tels que $S = N_m$, $N_m \cup \{\alpha\}$ ou $N_m \cup \{\alpha, \beta\}$, où $m \geq 2$ ; $G(N_m) \in \mathcal{F}_m$ ; $(0,1) \equiv (0,2)$ si et seulement si $S - N_m \neq \emptyset$ ; pour tous $i \in N_m$ et $\gamma \in S - N_m$, $(i, \gamma) \equiv (1,2)$ si $i$ est impair et $(i,\gamma) \equiv (0,\gamma)$ si $i$ est pair ; et tels que :

- Si $S = N_m$, alors $(0,2) \not\equiv (1,2) \not\equiv (0,1)$.
- Si $S - N_m = \{\alpha\}$, alors $(0,\alpha) \equiv (\alpha, 0)$ si $(0,1) \equiv (1,2)$ ; $(0,\alpha) \not\equiv (0,1)$ et $(0,\alpha) \not\equiv (1,2)$ si $(0,1) \not\equiv (1,2)$.
- Si $S - N_m = \{\alpha, \beta\}$, alors $(\beta, \alpha) \not\equiv (1,2) \not\equiv (0,1)$, $(0,\alpha) \equiv (1,2)$ et $(0,\beta) \equiv (0,1)$.

**Lemme 2.11.** *Étant donné un graphe $G$ d'ordre $\geq 4$ de la classe $\mathcal{F}$. Alors $G$ est (-1)-critique en $m$. De plus, si $G$ est d'ordre $\geq 7$, alors $I'(G) = P_m$.*

*Preuve.* Soit $G = (S, A)$ un graphe de la classe $\mathcal{F}$. Supposons d'abord que $S = N_m$. Dans ce cas, $m \geq 3$ et, d'après la remarque 2.8, $G(N_{m-1}) \in \mathcal{F}_{m-1}$. En utilisant le lemme 2.10, les graphes $G$ et $G - m$ sont indécomposables. Par définition de $\mathcal{F}_m$, pour tout $i \in N_{m-1}$, $i$ est un sommet critique de $G$. Il s'ensuit que $G$ est (-1)-critique en $m$. Lorsque $|S| \geq 7$, le graphe $G - \{m-1, m\}$ est indécomposable et pour tout $i \in N_{m-2}$, $i$ est un sommet critique de $G - m$. Il s'ensuit que $V_{I(G)}(m) = \{m-1\}$ et que, par la proposition 2.5, $I'(G)$ est un chemin. De plus, par la remarque 2.8, pour tout $i \in N_{m-1}$, $G - \{i, i+1\} \simeq G - \{m-1, m\}$, en particulier le graphe $G - \{i, i+1\}$ est indécomposable. On conclut que $I'(G) = I(G) = P_m$.

est pair. En effet, dans ce cas, $G(N_m)$ est indécomposable d'après le lemme 2.10. Il s'ensuit que $S = N_m$ d'après le corollaire 2.4. Supposons à présent que $(0,1) \equiv (1,2)$ et $m$ est impair. Encore d'après le lemme 2.10 et la remarque 2.8, $G(N_m)$ est décomposable et $G(N_{m-1})$ est indécomposable. Il existe alors $\mu \in S - N_m$ tel que $(0,\mu) \not\equiv (1,2)$. En utilisant le lemme 1.2, $G(N_m \cup \{\mu\})$ est indécomposable car $m \in [N_{m-1}]$, $\mu \notin [N_{m-1}]$ et $(m,\mu) \not\equiv (m,m-1)$. D'après le corollaire 2.4, $G = G(N_m \cup \{\mu\})$. Ainsi, $G - \{\mu, m\}$ est indécomposable, contradiction car $\mu$ est un sommet isolé de $I(G)$. Supposons enfin que $(0,2) \equiv (1,2)$ et $m$ est pair. D'après le lemme 2.10, $G(N_m)$ est décomposable. Ainsi $S - N_m \neq \emptyset$. De plus, d'après le lemme 2.10 et la remarque 2.8, $G(N_{m-1})$ est indécomposable pour $m \geq 4$. Supposons qu'il existe un sommet $\gamma \in S - N_m$ tel que $(2,1) \not\equiv (0,\gamma) \not\equiv (1,2)$. Comme $G(\{0,1,2,\gamma\})$ est indécomposable alors, d'après le corollaire 2.4, $m \geq 4$. On obtient $G(N_m \cup \{\gamma\})$ est indécomposable car $m \in [N_{m-1}]$, $\gamma \notin [N_{m-1}]$ et $(m,\gamma) \not\equiv (m,m-1)$. D'après le corollaire 2.4, $(\gamma, m)$ est un arc de $I(G)$, contradiction. Il s'ensuit que $(1,2) \not\equiv (2,1)$ et que $S - N_m = E_1 \cup E_2$, où $E_1 = \{x \in S - N_m : (0,x) \equiv (1,2)\}$ et $E_2 = \{x \in S - N_m : (0,x) \equiv (2,1)\}$. Notons que $E_1 \neq \emptyset$ (resp. $E_2 \neq \emptyset$), sinon $S - \{m\}$ (resp. $N_m$) est un intervalle non trivial de $G$. Comme $E_2 \cup N_m$ n'est pas un intervalle de $G$, il existe $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$, tel que $(e_2, e_1) \not\equiv (1,2)$. On vérifie que $G(\{0,1,e_2\})$ est indécomposable. En utilisant le lemme 1.2, $G(\{0,1,2,e_1,e_2\})$ est indécomposable car $2 \in [\{0,1,e_2\}]$, $e_1 \notin [\{0,1,e_2\}]$ et $(e_1,2) \not\equiv (e_2,2)$. Ainsi, par le corollaire 2.4, on obtient $m \geq 4$. Posons $X = N_{m-1} \cup \{e_1, e_2\}$, nous montrons que $G(X)$ est indécomposable. On vérifie que $e_2 \in Ext(N_{m-1})$. En effet, $e_2 \notin [N_{m-1}]$ car $(0,e_2) \equiv (2,1) \not\equiv (1,2) \equiv (1,e_2)$. De plus, pour tout $i \in N_{\frac{m}{2}-1}$, $e_2 \notin N_{m-1}(2i)$ car $(e_2, m-1) \equiv (2,1) \not\equiv (0,1) \equiv (2i, m-1)$, et $e_2 \notin X(2i+1)$ car $(e_2, 0) \equiv (1,2) \not\equiv (1,0) \equiv (2i+1, 0)$. Comme de plus, $e_1 \in [N_{m-1}]$ et $(e_2, e_1) \not\equiv (1,2) \equiv (1, e_1)$, alors $G(X)$ est indécomposable. On a $m \in Ext(X)$. En effet, d'une part $m \notin [X]$ car $(1,m) \not\equiv (e_1, m)$. D'autre part, pour tout $i \in N_{\frac{m}{2}-1}$, $m \notin X(2i)$ car $(2i, m-1) \equiv (0,1) \not\equiv (2,1) \equiv (m, m-1)$, et $m \notin X(2i+1)$ car $(2i+1, e_2) \equiv (1,2) \not\equiv (2,1) \equiv (m, e_2)$. De plus $m \notin X(e_1) \cup X(e_2)$ car $(e_2, m) \equiv (m, e_1) \equiv (1,2) \not\equiv (e_2, e_1)$. Ainsi $G(N_m \cup \{e_1, e_2\})$ est indécomposable et, d'après le corollaire 2.4, $G = G(N_m \cup \{e_1, e_2\})$. Il s'ensuit que $G - \{m, e_1\}$ est indécomposable, contradiction car $e_1$ est un sommet isolé de $I(G)$.

Si $S = N_m$, alors $G \in \mathcal{F}_m$ et $G - m \in \mathcal{F}_{m-1}$ et, d'après le lemme 2.10, $(0,2) \not\equiv (1,2) \not\equiv (0,1)$. Il s'ensuit que $G \in \mathcal{F}$. Supposons alors que $S - N_m \neq \emptyset$ . Dans ce cas $(0,1) \equiv (0,2)$. Supposons d'abord que $(0,1) \not\equiv (1,2)$. S'il existe $\omega \in S - N_m$ tel que $(0,\omega) \not\equiv (0,1)$ et $(0,\omega) \not\equiv (1,2)$ alors, $G(N_m \cup \{\omega\})$ est isomorphe à un graphe de la classe $\mathcal{F}$. Il s'ensuit que $G(N_m \cup \{\omega\})$ est (-1)-critique et que, d'après le corollaire 2.4, $G = G(N_m \cup \{\omega\})$. Sinon, $S - N_m = E_1 \cup E_3$ où $E_3 = \{x \in S - N_m : (0,x) \equiv (0,1)\}$. Remarquons que $E_1 \neq \emptyset$ (resp. $E_3 \neq \emptyset$), sinon $(E_3 \cup N_m) - \{0\}$ (resp. $N_m$) est un intervalle non trivial de $G$, contradiction. Comme $E_3 \cup N_m$ n'est pas un intervalle de $G$, il existe $(e_1, e_3) \in E_1 \times E_3$, tel que $(e_3, e_1) \not\equiv (1,2)$. Ainsi, $G(N_m \cup \{e_1, e_3\})$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{F}$. Il s'ensuit que $G(N_m \cup \{e_1, e_3\})$ est (-1)-critique et que, d'après le corollaire 2.4, $G = G(N_m \cup \{e_1, e_3\})$. Supposons enfin que $(0,1) \equiv (1,2)$. D'après le lemme 2.9, d'une part $(0,1) \not\equiv (1,0)$ et d'autre part, pour tous $x < y \in N_m$, $(x,y) \equiv (0,1)$. Il s'ensuit que $G(N_m) = O_m$ ou $O_m^\star$. Remarquons que si $G \in \mathcal{F}$, alors $G^\star \in \mathcal{F}$. On peut alors supposer que $G(N_m) = O_m$. Il suffit de montrer qu'il existe un sommet $\nu \in S - N_m$, tel que $(0,\nu) \not\equiv (1,2)$ et $(0,\nu) \not\equiv (2,1)$. En effet, dans ce cas, $(0,\nu) \equiv (\nu,0)$ et par suite, $G(N_m \cup \{\nu\})$ est isomorphe à un graphe de la classe $\mathcal{F}$. Il s'ensuit que $G(N_m \cup \{\nu\})$ est (-1)-critique et que, d'après le corollaire 2.4, $G = G(N_m \cup \{\nu\})$. Suppposons alors, par l'absurde, que $S - N_m = E_1 \cup E_2$. Remarquons que $E_1 \neq \emptyset$ sinon, $E_2 \cup N_{m-2}$ est un intervalle non trivial de $G - m$ si $m$ est impair, $E_2 \cup N_{m-1}$ est un intervalle non trivial de $G$ si $m$ est pair. Contradiction car $G$ et $G - m$ sont indécomposables. De même $E_2 \neq \emptyset$, sinon $N_m$ est un intervalle non trivial de $G$, contradiction. L'entier $m$ est pair, autrement, pour $y \in E_2$, $G(N_m \cup \{y\}) \simeq V_{m+2}$. D'après le corollaire 2.4, $G = G(N_m \cup \{y\}) \simeq V_{m+2}$, contradiction car $V_{m+2}$ est un tournoi critique. Comme $N_m \longrightarrow E_1$ et $E_2 \cup N_m$ n'est pas un intervalle de $G$, il existe $(b_1, b_2) \in E_1 \times E_2$, tel que $(b_2, b_1) \not\equiv (1,2)$. En remarquant que $G(N_{m-1} \cup \{b_2\}) \simeq V_{m+1}$, on vérifie que $G(N_m \cup \{b_1, b_2\})$ est indécomposable en considérant la partition $p_{N_{m-1} \cup \{b_2\}}$. Il suffit de remarquer que $N_{m-1} \cup \{b_2\} \longrightarrow m \longrightarrow b_1$ et que $b_1 \notin [N_{m-1} \cup \{b_2\}]$. Il s'ensuit, d'après de corollaire 2.4, que $G = G(N_m \cup \{b_1, b_2\})$. Ainsi $G - \{m, b_1\}$ est indécomposable, contradiction car $b_1$ est un sommet isolé de $I(G)$. □

### 2.3.2 Les graphes (-1)-critiques $G$ en un sommet interne de $I'(G)$

Nous introduisons, pour $m \geq 2$ et $a \in \{1, \cdots, m-1\}$, la classe $\mathcal{G}_m(a)$ des graphes $G$ définis sur $N_m$ tels que $N_m - \{0,1\}$ et $N_{m-2}$ sont des intervalles respectifs de $G - 0$ et de $G - m$ ; $N_m - \{1\}$ et $N_m - \{m-1\}$ ne sont pas des intervalles de $G$ et pour tout $i \in \{1, \cdots, m-1\} - \{a\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$.

Notons d'abord les remarques suivantes.

**Remarque 2.13.** *Étant donné $G \in \mathcal{G}_m(a)$, la permutation $i \longmapsto m - i$ est un isomorphisme de $G$ sur un graphe de $\mathcal{G}_m(m-a)$.*

**Remarque 2.14.** *Soit $G \in \mathcal{G}_m(a)$. On a $G - \{i, i+1\} \simeq G - \{0,1\}$ ou $G(N_{m-2})$ suivant que $0 \leq i \leq a-1$ ou que $a \leq i \leq m-1$ respectivement. Lorsque $m \geq 4$, $G(N_{m-2}) \in \mathcal{F}_{m-2}$ ou $\mathcal{G}_{m-2}(a)$ suivant que $a \geq m-2$ ou que $a < m-2$ respectivement ; l'application $i \mapsto m - i$ est un isomorphisme* *de* $G-\{0,1\}$ *sur un graphe de* $\mathcal{F}_{m-2}$ *ou de* $\mathcal{G}_{m-2}(m-a)$ *suivant que* $a \leq 2$ *ou que* $a > 2$ *respectivement. De plus, si* $G-\{0,1\}$ *(resp.* $G(N_{m-2})$*) est indécomposable,* $G$ *est indécomposable si et seulement si* $0 \not\equiv [\{2,\cdots,m\}]$ *(resp.* $m \not\equiv [N_{m-2}]$*).*

**Lemme 2.15.** *Soit* $G$ *un graphe d'ordre* $\geq 7$*, (-1)-critique en* $a \in \{1,\cdots,m-1\}$ *et tel que* $I'(G) = P_m$*. Alors,* $G(N_m) \in \mathcal{G}_m(a)$*.*

*Preuve.* On pose $G' = G(N_m)$. D'après le lemme 2.1, pour tout $i \in \{1,\cdots,m-1\}-\{a\}$, $\{i-1,i+1\}$ est un intervalle de $G-i$ et donc de $G'-i$. De plus, $N_m-\{0,1\}$ et $N_{m-2}$ sont des intervalles respectifs de $G-0$ et de $G-m$. En particulier, il s'agit d'intervalles respectifs de $G'-0$ et de $G'-m$. Il s'ensuit que $(1,0) \not\equiv (1,2)$ et que $(m-1,m-2) \not\equiv (m-1,m)$, de sorte que $N_m-\{1\}$ et $N_m-\{m-1\}$ ne sont pas des intervalles de $G'$. Ainsi, $G' \in \mathcal{G}_m(a)$. □

Nous introduisons les classes $\Omega_1$, $\Omega_2$ et $\Omega_3$ de graphes définies comme suit.

- $\Omega_1$ est la classe des graphes $G$ d'ordre $\geq 7$, (-1)-critiques en $2k+1$, tels que $I'(G) = P_{2n+1}$, où $n \geq 1$ et $k \in N_{n-1}$.
- $\Omega_2$ est la classe des graphes $G$ d'ordre $\geq 7$, (-1)-critiques en $2k+1$, tels que $I'(G) = P_{2n}$, où $n \geq 1$ et $k \in N_{n-1}$.
- $\Omega_3$ est la classe des graphes $G$ d'ordre $\geq 7$, (-1)-critiques en $2k$, tels que $I'(G) = P_{2n}$, où $n \geq 2$ et $k \in \{1,\cdots,n-1\}$.

Soit $G$ un graphe d'ordre $\geq 7$, (-1)-critique en $2k$ et tel que $I'(G) = P_{2n+1}$, où $n \geq 1$ et $k \in \{1,\cdots,n\}$. La permutation $\sigma$ de $S(G)$ qui fixe les sommets de $S(G)-N_{2n+1}$ et telle que $\sigma(i) = 2n+1-i$ pour $i \in N_{2n+1}$, est un isomorphisme de $G$ sur un graphe de la classe $\Omega_1$. Nous en déduisons la remarque suivante.

**Remarque 2.16.** *À des isomorphismes près, les graphes* $G$ *d'ordre* $\geq 7$*, (-1)-critiques en* $a$ *et tels que* $I'(G)$ *est un chemin dont* $a$ *est un sommet interne, sont les graphes de la classe* $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$*.*

Nous caractérisons la classe $\mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$ comme suit.

**Lemme 2.17.** *Soit un graphe* $G$ *défini sur* $N_{2n+1}$*, où* $n \geq 1$*. Alors* $G \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$*, où* $k \in N_{n-1}$*, si et seulement si* $(0,1) \not\equiv (2,1) \not\equiv (2n,2n+1)$ *et pour tous* $i \leq j \in N_n$ *on a : pour* $i \leq k$*,* $(2i,2j+1) \equiv (0,1)$ *; pour* $i \geq k+1$*,* $(2i,2j+1) \equiv (2n,2n+1)$ *; pour* $i < j$*,* $(2i+1,2j) \equiv (1,2) \equiv (2i+1,2j+1)$*,* $(2i,2j) \equiv (0,2)$ *si* $j \leq k$ *et* $(2i,2j) \equiv (1,2)$ *si* $j \geq k+1$*.*

*Preuve.* Soient $n \geq 1$, $k \in N_{n-1}$ et $G \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$. Considérons $i \leq j \in N_n$. Comme pour tout $l \in \{1,\cdots,2n\}-\{2k+1\}$, $\{l-1,l+1\}$ est un intervalle de $G-l$ alors, pour $i \leq k$, $(2i,2j+1) \equiv (0,2j+1) \equiv$

*Preuve.* Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre $\geq 7$ de la classe $\mathcal{G}$, il existe $n \geq 2$, $k \in N_{n-1}$ tels que $S = N_{2n+1}$ ou $N_{2n+1} \cup \{\alpha\}$ et $G(N_{2n+1}) \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$. D'après la remarque 2.14, pour tout $i \in N_{2n}$, il existe un isomorphisme $\sigma$ de $G(N_{2n+1})-\{i, i+1\}$ sur $G(N_{2n+1})-\{0,1\}$ ou $G(N_{2n-1})$. Lorsque $S = N_{2n+1} \cup \{\alpha\}$, $\sigma$ se prolonge en un isomorphisme, fixant $\alpha$, de $G-\{i, i+1\}$ sur $G-\{0,1\}$ ou $G-\{2n, 2n+1\}$. Pour tout $x \in S-\{1, 2n\}$, $G-\{x, 0\}$ et $G-\{x, 2n+1\}$ sont décomposables. De même si $\alpha \in S$, $G-\{\alpha, 2k+1\}$ est décomposable car $N_{2k}$ et $\{2k+2, \cdots, 2n+1\}$ en sont des intervalles. Il suffit de montrer que les graphes $G$, $G-\{0,1\}$ et $G-\{2n, 2n+1\}$ sont indécomposables. En effet, dans ce cas, par constuction de $\mathcal{G}$, tous les sommets de $G-\{2k+1\}$, sont des sommets critiques de $G$. Il s'ensuit en utilisant ce qui précède, que $I'(G) = P_{2n+1}$ d'après le lemme 2.1. De plus, $\{2k, 2k+2\}$ n'est pas un intervalle de $G-\{2k+1\}$. En effet, si $(0,2) \equiv (1,2) \not\equiv (0,1)$, alors $S = N_{2n+1}$ et $(2k, 2n+1) \equiv (0,1) \not\equiv (2n, 2n+1) \equiv (2k+2, 2n+1)$. Supposons que $(0,2) \equiv (1,2) \equiv (0,1)$. Dans ce cas $S = N_{2n+1} \cup \{\alpha\}$. Si $(0,2) \equiv (2n, 2n+1)$ (resp. $(0,2) \not\equiv (2n, 2n+1)$), alors $(\alpha, 2k+2) \equiv (1,2) \not\equiv (\alpha, 0) \equiv (\alpha, 2k)$ (resp. $(2k, 2n+1) \equiv (0,1) \not\equiv (2n, 2n+1) \equiv (2k+2, 2n+1)$). Si $(0,2) \not\equiv (1,2)$, alors $k \neq 0$ et $(0, 2k+2) \equiv (1,2) \not\equiv (0,2) \equiv (0, 2k)$. D'après le lemme 2.1, $2k+1$ est un sommet non critique de $G$, et donc $G$ est (-1)-critique en $2k+1$.

Montrons pour finir, que $G$, $G-\{0,1\}$ et $G-\{2n, 2n+1\}$ sont indécomposables. Supposons d'abord que $S = N_{2n+1}$. Comme $(0,1) \not\equiv (1,2)$ alors, d'après le lemme 2.18, $G$ est indécomposable. Si $k \neq n-1$, d'après la remarque 2.14, $G-\{2n, 2n+1\} \in \mathcal{G}_{2n-1}(2k+1)$ et donc, $G-\{2n, 2n+1\}$ est indécomposable d'après le lemme 2.18. Si $k = n-1$, $G-\{2n, 2n+1\} \in \mathcal{F}_{2n-1}$ et, comme $(0,2) \not\equiv (0,1) \not\equiv (1,2)$, $G-\{2n, 2n+1\}$ est indécomposable d'après le lemme 2.10. L'application $\tau : l \longmapsto l-2$ est un isomorphisme de $G-\{0,1\}$ sur un graphe $H$ de $\mathcal{G}_{2n-1}(2k-1)$ ou de $\mathcal{F}_{2n-1}$, suivant que $k \geq 1$ ou que $k = 0$ respectivement. Si $k \geq 1$, alors $(2,3) \not\equiv_G (3,4)$, et donc $(0,1) \not\equiv_H (1,2)$. Si $k = 0$, alors $(2,4) \not\equiv_G (2,3) \not\equiv_G (3,4)$ et donc $(0,2) \not\equiv_H (0,1) \not\equiv_H (1,2)$. D'après les lemmes 2.18 et 2.10, le graphe $H$, et donc $G-\{0,1\}$, est indécomposable. Supposons enfin que $S - N_{2n+1} = \{\alpha\}$. Pour tout $i \in N_n$, on pose $X_i = N_{2i+1} \cup \{\alpha\}$. On vérifie que $G(X_0)$ est indécomposable. Soit $i \in N_{n-1}$. Supposons que $G(X_i)$ est indécomposable. Si $i < k$, alors $2i+3 \in X_i(2i+1)$, $2i+2 \notin X_i(2i+1)$ et $(2i+2, 2i+1) \not\equiv (2i+2, 2i+3)$. Si $i \geq k$, alors $2i+2 \in [X_i]$, $2i+3 \notin [X_i]$ et $(2i+2, 2i+1) \not\equiv (2i+2, 2i+3)$. Ainsi, $G(X_{i+1})$ est indécomposable d'après le lemme 1.2. En particulier, $G-\{2n, 2n+1\}$ et $G$ sont indécomposables. Montrons enfin que $G-\{0,1\}$ est indécomposable. Pour $k \geq 1$, l'application $\tau : l \longmapsto l-2$ se prolonge en un isomorphisme, fixant $\alpha$, de $G-\{0,1\}$ sur un graphe $G'$. On vérifie que $G' \in \mathcal{G}$ et on déduit, d'après ce qui précède, que $G'$, et donc $G-\{0,1\}$ est indécomposable. Supposons maintenant que $k = 0$. Si $(2n, 2n+1) \equiv (1,2)$, on vérifie que $G-\{0,1\}$ est isomorphe au tournoi critique $V_{2n+1}$. Supposons alors que $(2n, 2n+1) \not\equiv (1,2)$. Comme $(2,4) \not\equiv (2,3) \not\equiv (3,4)$, d'après le lemme 2.10 et la remarque 2.14, $G - \{0,1,\alpha\}$ est indécomposable. On a $\alpha \in Ext(Y)$, où $Y = S - \{0,1,\alpha\}$. En effet, $\alpha \notin [Y]$ car $(2,\alpha) \equiv (2,1) \not\equiv (1,2) \equiv (3,\alpha)$. De plus, pour tout $i \in \{1,\cdots,n\}$, $(2i, 2n+1) \equiv (2n, 2n+1) \not\equiv (2,1) \equiv (\alpha, 2n+1)$ et $(\alpha, 2) \equiv (1,2) \not\equiv (2i+1, 2)$. Il s'ensuit que pour tout $j \in \{2,\cdots,2n+1\}$, $\alpha \notin Y(j)$. □

**Proposition 2.20.** *À des isomorphismes près, les graphes de la classe $\Omega_1$ sont les graphes d'ordre $\geq 7$ de $\mathcal{G}$.*

*Preuve.* Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre $\geq 7$, (-1)-critique en $2k+1$, tel que $I'(G) = P_{2n+1}$, où $n \geq 1$ et $k \in N_{n-1}$. D'après le lemme 2.15, $G(N_{2n+1}) \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$. D'après le lemme 2.18 et le corollaire 2.4, $S - N_{2n+1} \neq \emptyset$ si et seulement si $(0,1) \equiv (1,2)$. Supposons d'abord que $S = N_{2n+1}$. Si $(0,2) \equiv (1,2)$, alors $(2n, 2n+1) \not\equiv (0,1)$. Autrement, on vérifie à l'aide du lemme 2.17, que $\{2k, 2k+2\}$ est un intervalle de $G - \{2k+1\}$, contradiction. Si $k = 0$ , alors $(0,2) \equiv (1,2)$. On a $(2n, 2n+1) \not\equiv (1,2)$ sinon $G - \{0,1\} \simeq \mathcal{O}_{2n-1}$, contradiction. Si $k = n-1$, $G - \{2n, 2n+1\}$ est, d'après la remarque 2.14, un graphe de $\mathcal{F}_{2n-1}$. Comme ce graphe est indécomposable, alors $(0,2) \not\equiv (0,1)$ d'après le lemme 2.10. Supposons maintenant que $S - N_{2n+1} \neq \emptyset$. À un isomorphisme près, $\alpha \in S - N_{2n+1}$. D'après le lemme 2.1, pour tout $i \in N_n$, $(2i+1, \alpha) \equiv (1,2)$, $(2i, \alpha) \equiv (0, \alpha)$ si $i \leq k$ ; $(2i, \alpha) \equiv (2,1) \equiv (1,0)$ si $i \geq k+1$. Par les lemmes 2.17 et 2.15, $(2,1) \not\equiv (1,2)$. Ainsi, quitte à remplacer $G$ par $G^*$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1$ et $1 \longrightarrow 2$. Il existe $\gamma \in S - N_{2n+1}$ tel que $(0,\gamma) \not\equiv (1,2)$, sinon on a une contradiction en vérifiant que $(S - N_{2n+1}) \cup \{2k+2, \cdots, 2n+1\}$ est un intervalle non trivial de $G$. Si $(0,2) \equiv (1,2) \equiv (2n, 2n+1)$, on vérifie, à l'aide du lemme 2.17, que $G(N_{2n+1}) = \mathcal{O}_{2n+1}$. Il s'ensuit que $(0,\gamma) \equiv (\gamma, 0)$, autrement $G(N_{2n+1} \cup \{\gamma\}) \simeq V_{2n+3}$, contradiction d'après le corollaire 2.4. Ainsi $G(N_{2n+1} \cup \{\gamma\})$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{G}$. Lorsque $n = 1$, on vérifie que $G(N_{2n+1} \cup \{\gamma\}) = G(\{0,1,2,3,\gamma\})$ est indécomposable. Lorsque $n \geq 2$, $G(N_{2n+1} \cup \{\gamma\})$ est indécomposable d'après le lemme 2.19. D'après le corollaire 2.4, $\gamma = \alpha$ et $S = N_{2n+1} \cup \{\gamma\}$. □

**Lemme 2.21.** *Soit un graphe $G$ défini sur $N_{2n}$, où $n \geq 1$. Alors $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$, où $k \in N_{n-1}$, si et seulement si $(0,1) \not\equiv (2,1)$ et pour tous $x < y \in N_{2n}$ on a : si $x$ et $y$ ne sont pas tous deux pairs, alors $(x,y) \equiv (1,2)$ ; si $x$ et $y$ sont pairs, alors $(x,y) \equiv (0,2)$, $(2n-2, 2n)$ ou $(2k, 2k+2)$, suivant que $y \leq 2k$, $x \geq 2k+2$ ou que $x \leq 2k < y$ respectivement.*

*Preuve.* Soient $n \geq 1$, $k \in N_{n-1}$ et supposons $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$. On a $(0,1) \not\equiv (2,1)$ car $N_{2n} - \{1\}$ n'est pas un intervalle de $G$ et $N_{2n} - \{0,1\}$ est un intervalle de $G - 0$. Soient $x < y$ dans $N_{2n}$. Si $x$ et $y$ sont pairs, comme pour tout $l \in \{1, \cdots, 2n-1\} - \{2k+1\}$, $\{l-1, l+1\}$ est un intervalle de $G-l$, alors $(x, y) \equiv (0, 2)$, $(2n-2, 2n)$ ou $(2k, 2k+2)$, suivant que $y \leq 2k$, $x \geq 2k+2$ ou que $x \leq 2k < y$ respectivement. Sinon, comme $N_{2n} - \{0, 1\}$ et $N_{2n-2}$ sont des intervalles respectifs de $G - 0$ et de $G - 2n$, alors $(x, y) \equiv (1, y) \equiv (1, 2)$ si $x$ est impair ; $(x, y) \equiv (x, 2n - 1) \equiv (1, 2n - 1) \equiv (1, 2)$ si $y$ est impair.

Réciproquement, comme pour tout $i \in N_{2n} - \{0, 1\}$ (resp. $i \in N_{2n-2}$), $(1, i) \equiv (1, 2)$ (resp. $(i, 2n-1) \equiv (1, 2)$) alors $N_{2n} - \{0, 1\}$ et $N_{2n-2}$ sont des intervalles respectifs de $G - 0$ et de $G - 2n$. Comme $(1, 2) \equiv (0, 1) \not\equiv (2, 1)$, alors quitte à remplacer $G$ par $G^\star$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$ et donc $N_{2n-2} \longrightarrow 2n-1 \longrightarrow 2n$. En particulier, $N_{2n} - \{1\}$ et $N_{2n} - \{2n-1\}$ ne sont pas des intervalles de $G$. Soit $i \in \{1, \cdots, 2n - 1\} - \{2k + 1\}$. Remarquons que pour tout $x \in N_{2n} - \{i-1, i, i+1\}$, $(x, i-1) \equiv (x, i+1)$ , de sorte que $\{i - 1, i + 1\}$ est un intervalle de $G - i$. □

**Lemme 2.22.** *Soient $n \geq 1$, $k \in N_{n-1}$ et $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$. Le graphe $G$ est indécomposable si et seulement si $(2k, 2k+2) \not\equiv (1, 2)$.*

*Preuve.* Comme d'après le lemme 2.21, $(1, 2) \not\equiv (2, 1)$, quitte à remplacer $G$ par $G^\star$, on peut supposer que $1 \longrightarrow 2$. Si $(2k, 2k + 2) \equiv (1, 2)$, alors, encore par le lemme 2.21, on a $N_{2k} \longrightarrow \{2k + 1, \cdots, 2n\}$ et donc $G$ est décomposable. Supposons que $(2k, 2k + 2) \not\equiv (1, 2)$. Pour $n = 1$, $G \in \mathcal{G}_2(1)$ et $(0, 2) \not\equiv (1, 2) \not\equiv (1, 0) \not\equiv (2, 0)$, donc $G$ est indécomposable. Soit $n > 1$. Par la remarque 2.14 et par hypothèse de récurrence, $G - \{2n - 1, 2n\}$ ou $G - \{0, 1\}$ est indécomposable. De plus, $2n \not\in [N_{2n-2}]$ et $0 \not\in [\{2, \cdots, 2n\}]$. Il s'ensuit que $G$ est indécomposable d'après la remarque 2.14. □

Nous introduisons la classe $\mathcal{G}'$ des graphes $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$, où $n \geq 1$ et $k \in N_{n-1}$, tels que $(2k, 2k+2) \not\equiv (1, 2)$ ; $(2n-2, 2n) \not\equiv (0, 2)$ si $(2k, 2k+2) \equiv (0, 2)$ ; $(2n - 2, 2n) \not\equiv (1, 2)$ si $k = 0$ et $(0, 2) \not\equiv (1, 2)$ si $k = n - 1$.

Nous complétons la remarque 2.13 comme suit.

**Remarque 2.23.** *Étant donné un graphe $G \in \mathcal{G}'$, l'application $\phi : x \longmapsto 2n - x$ est un isomorphisme de $G$ sur un graphe de $\mathcal{G}'$.*

**Lemme 2.24.** *Les graphes d'ordre $\geq 7$ de la classe $\mathcal{G}'$ sont des graphes de la classe $\Omega_2$.*

*Preuve.* Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre $\geq 7$ de la classe $\mathcal{G}'$. Il existe $n \geq 3$ et $k \in N_{n-1}$, tels que $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k + 1)$. Comme $(2k, 2k + 2) \not\equiv (1, 2)$, d'après le lemme 2.22, $G$ est indécomposable. D'après la remarque 2.14, pour tout $i \in N_{n-1}$, $G - \{i, i+1\} \simeq G - \{0, 1\}$ ou $G - \{2n-1, 2n\}$. Pour tout $x \in S - \{1, 2n-1\}$, Les graphes $G - \{x, 0\}$ et $G - \{x, 2n\}$ sont décomposables. Il suffit de montrer que $G - \{0, 1\}$ et $G - \{2n-1, 2n\}$ sont indécomposables. En effet, dans ce cas, par construction de $\mathcal{G}'$, tous les sommets de $G - \{2k + 1\}$ sont des sommets critiques de $G$. Il s'ensuit, en utilisant ce qui précède, que $I(G) = P_{2n}$ d'après le lemme 2.1. De plus, $\{2k, 2k+2\}$ n'est pas un intervalle de $G - \{2k+1\}$. En effet, si $(2k, 2k+2) \not\equiv (0,2)$, alors $(0, 2k) \equiv (0,2) \not\equiv (2k, 2k+2) \equiv (0, 2k+2)$. Si $(2k, 2k+2) \equiv (0,2)$, alors $(2n, 2k) \equiv (2k+2, 2k) \equiv (2,0) \not\equiv (2n, 2n-2) \equiv (2n, 2k+2)$. D'après le lemme 2.1, $2k+1$ est un sommet non critique de $G$, et donc $G$ est (-1)-critique en $2k+1$. Montrons pour finir, que $G - \{2n-1, 2n\}$ et $G - \{0,1\}$ sont indécomposables. D'après la remarque 2.14, $G - \{2n-1, 2n\} \in \mathcal{G}_{2n-2}(2k+1)$ ou $\mathcal{F}_{2n-2}$ suivant que $k < n-1$ ou que $k = n-1$ respectivement. D'une part $(2k, 2k+2) \not\equiv (1,2)$, d'autre part $(0,1) \not\equiv (0,2) \not\equiv (1,2)$ lorsque $k = n-1$. Il s'ensuit, en utilisant les lemmes 2.22 et 2.10, que $G - \{2n-1, 2n\}$ est indécomposable. D'après la remarque 2.23, il existe un isomorphisme $\phi$ de $G$ sur un graphe $H$ de $\mathcal{G}'$, avec $\phi(0) = 2n$ et $\phi(1) = 2n-1$. La restriction de $\phi$ à $S - \{0,1\}$ est un isomorphisme de $G - \{0,1\}$ sur $H - \{2n-1, 2n\}$. Le graphe $H - \{2n-1, n\}$ étant indécomposable d'après ce qui précède, il en est de même pour $G - \{0,1\}$. □

**Proposition 2.25.** *$\Omega_2$ est la classe des graphes d'ordre $\geq 7$ de la classe $\mathcal{G}'$.*

*Preuve.* Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre $\geq 7$, (-1)-critiques en $2k+1$, tel que $I'(G) = P_{2n}$, où $n \geq 1$ et $k \in N_{n-1}$. D'après le lemme 2.15, $G(N_{2n}) \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$. On a $S = N_{2n}$, autrement, d'après le lemme 2.1, pour $\gamma \in S - N_{2n}$, $(1,2) \equiv (1,\gamma) \equiv (3,\gamma) \equiv \cdots \equiv (2n-1,\gamma) \equiv (2n-1,1) \equiv (2,1)$. Contradiction car, d'après le lemme 2.21, $(1,2) \equiv (0,1) \not\equiv (2,1)$. D'après le lemme 2.22, $(2k, 2k+2) \not\equiv (1,2)$. Si $(2k, 2k+2) \equiv (0,2)$, alors $(2n-2, 2n) \not\equiv (0,2)$. Sinon on a une contradiction en vérifiant, à l'aide du lemme 2.21, que $\{2k, 2k+2\}$ est un intervalle du graphe indécomposable $G - \{2k+1\}$. Si $k = 0$, alors $(2n-2, 2n) \not\equiv (1,2)$. Autrement, en utilisant le lemme 2.21, $\{2, \cdots, 2n-1\}$ est un intervalle non trivial du graphe indécomposable $G - \{0,1\}$, contradiction. Lorsque $k = n-1$, l'application $i \longmapsto 2n-i$ est un isomorphisme de $G$ sur un graphe $H$ de $\Omega_2$ et on a $H \in \mathcal{G}_{2n}(1)$. D'après ce qui précède, $(2n-2, 2n) \not\equiv_H (1,2)$, donc $(2,0) \not\equiv_G (2n-1, 2n-2) \equiv_G (2,1)$. □

**Lemme 2.26.** *Soit un graphe $G$ défini sur $N_{2n}$, où $n \geq 2$. Alors $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$, où $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, si et seulement si $(0,1) \not\equiv (2,1) \not\equiv (2n-1, 2n)$ et pour tous $x < y \in N_{2n}$, on a : $(x,y) \equiv (0,2)$ si $x$ et $y$ sont pairs ; $(x,y) \equiv (0,1)$ si $x$ est pair, $y$ est impair et $y < 2k$ ; $(x,y) \equiv (2n-1, 2n)$ si $x$ est impair, $y$ est pair et $x > 2k$ ; $(x,y) \equiv (1,2)$ dans le reste des cas.*

*Preuve.* Soient $n \geq 2$, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$ et $x < y \in N_{2n}$. Comme pour tout $l \in \{1, \cdots, 2n-1\} - \{2k\}$, $\{l-1, l+1\}$ est un intervalle de $G - l$, alors $(x,y) \equiv (0,2)$ si $x$ et $y$ sont pairs ; $(x,y) \equiv (0,1)$ si $x$ est pair,

$y$ est impair et $y < 2k$ ; $(x,y) \equiv (2n-1,2n)$ si $x$ est impair, $y$ est pair et $x > 2k$. Comme de plus $N_{2n} - \{0,1\}$ et $N_{2n-2}$ sont des intervalles respectifs de $G - 0$ et de $G - 2n$, on vérifie que dans le reste des cas $(x,y) \equiv (1,2)$. Puisque $N_{2n} - \{1\}$ et $N_{2n} - \{2n-1\}$ ne sont pas des intervalles de $G$, alors $(0,1) \not\equiv (2,1) \equiv (2n-1,2n-2) \not\equiv (2n-1,2n)$.

Réciproquement, comme pour tout $i \in N_{2n} - \{0,1\}$ (resp. $i \in N_{2n-2}$), on a $(1,i) \equiv (1,2)$ (resp. $(i,2n-1) \equiv (1,2)$), alors $N_{2n} - \{0,1\}$ et $N_{2n-2}$ sont des intervalles respectifs de $G-0$ et de $G-2n$. Comme $(2n-1,2n) \not\equiv (2,1) \not\equiv (0,1)$, alors $N_{2n} - \{1\}$ et $N_{2n} - \{2n-1\}$ ne sont pas des intervalles de $G$. Soit $j \in \{1,\cdots,2n-1\} - \{2k\}$. Pour $x \in N_{2n} - \{j-1,j,j+1\}$, $(x,j-1) \equiv (x,j+1)$, et donc $\{j-1,j+1\}$ est un intervalle de $G-j$. □

**Lemme 2.27.** *Soient $n \geq 2$, $k \in \{1,\cdots,n-1\}$ et $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$. Alors $G$ est indécomposable si et seulement si* $(0,2) \not\equiv (1,2)$.

*Preuve.* Si $(0,2) \equiv (1,2)$, d'après le lemme 2.26, $N_{2k}$ est un intervalle non trivial de $G$. Donc $G$ est décomposable. Supposons que $(0,2) \not\equiv (1,2)$. Pour $n = 2$, $G \in \mathcal{G}_4(2)$ et on vérifie avec l'aide du lemme 2.26, que $G$ est indécomposable. Soit $n > 2$. Par la remarque 2.14 et par hypothèse de récurrence, $G - \{2n-1,2n\}$ ou $G - \{0,1\}$ est indécomposable. De plus, $2n \notin [N_{2n-2}]$ et $0 \notin [\{2,\cdots,2n\}]$, donc $G$ est indécomposable d'après la remarque 2.14. □

Nous considérons enfin la classe $\mathcal{G}''$ des graphes $G = (S,A)$ tels que $S = N_{2n}$, $N_{2n} \cup \{\alpha\}$ ou $N_{2n} \cup \{\alpha,\beta\}$, où $n \geq 2$ ; $G(N_{2n}) \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$ où $k \in \{1,\cdots,n-1\}$ ; $(0,2) \equiv (1,2)$ si et seulement si $S - N_{2n} \neq \emptyset$ et tels que :

- Si $S = N_{2n}$, alors $(2n-1,2n) \not\equiv (1,2)$ lorsque $(0,1) \equiv (1,2)$ ; $(0,2) \not\equiv (2n-1,2n)$ lorsque $k = 1$ ; $(0,2) \not\equiv (0,1)$ lorsque $k = n-1$.
- Si $S - N_{2n} \neq \emptyset$, alors pour tous $x \in N_{2n}$ et $\gamma \in S - N_{2n}$, $(x,\gamma) \equiv (0,\gamma)$ si $x$ est pair, $(x,\gamma) \equiv (1,2)$ ou $(2,1)$ si $x$ est impair et suivant que $x < 2k$ ou que $x > 2k$ respectivement. De plus, si $S - N_{2n} = \{\alpha\}$, alors $(2,1) \not\equiv (0,\alpha) \not\equiv (1,2)$. Si $S - N_{2n} = \{\alpha,\beta\}$, alors $(\beta,\alpha) \not\equiv (0,\alpha) \equiv (1,2) \not\equiv (2,1) \equiv (0,\beta)$.

La remarque suivante complète la remarque 2.13.

**Remarque 2.28.** *Soit $G = (S,A)$ un graphe défini sur $N_{2n}$, sur $N_{2n} \cup \{\alpha\}$ ou sur $N_{2n} \cup \{\alpha,\beta\}$ où $n \geq 2$. Si $G \in \mathcal{G}''$, alors la permutation $h$ de $S$ définie par $h(x) = 2n - x$ si $x \in N_{2n}$, $h(\alpha) = \alpha$ lorsque $S - N_{2n} = \{\alpha\}$, $h(\alpha) = \beta$ et $h(\beta) = \alpha$ lorsque $S - N_{2n} = \{\alpha,\beta\}$, est un isomorphisme de $G$ sur un graphe de $\mathcal{G}''$.*

**Lemme 2.29.** *Étant donné un graphe $G$ de la classe $\mathcal{G}''$, il existe $n \geq 2$ et $k \in \{1,\cdots,n-1\}$ tels que $G$ est (-1)-critique en $2k$ et $I'(G) = P_{2n}$.*

*Preuve.* Soit $G = (S, A)$ un graphe de la classe $\mathcal{G}''$. Il existe $n \geq 2$ et $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ tels que $S - N_{2n} = \emptyset$, $\{\alpha\}$ ou $\{\alpha, \beta\}$ et $G(N_{2n}) \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$. Nous montrons d'abord que les graphes $G$, $G - \{0, 1\}$ et $G - \{2n-1, 2n\}$ sont indécomposables. Supposons d'abord que $S = N_{2n}$. Comme $(0, 2) \not\equiv (1, 2)$, d'après le lemme 2.27, $G$ est indécomposable. Si $k \neq n-1$, d'après la remarque 2.14, $G - \{2n-1, 2n\} \in \mathcal{G}_{2n-2}(2k)$ et donc, $G - \{2n-1, 2n\}$ est indécomposable d'après le lemme 2.27. Si $k = n-1$, $G - \{2n-1, 2n\} \in \mathcal{F}_{2n-2}$, et comme $(0, 1) \not\equiv (0, 2) \not\equiv (1, 2)$, alors $G - \{2n-1, 2n\}$ est indécomposable d'après le lemme 2.10. Supposons maintenant que $S - N_{2n} \neq \emptyset$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pose $X_i = N_{2i} \cup (S - N_{2n})$. On va montrer par récurrence que $G(X_i)$ est indécomposable. C'est vrai pour $i = 1$. Soit $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, on suppose $G(X_i)$ indécomposable. Si $i < k$, alors $2i+2 \in X_i(2i)$, $2i+1 \notin X_i(2i)$ et $(2i+1, 2i) \not\equiv (2i+1, 2i+2)$. Si $i \geq k$, alors $2i+1 \in [X_i]$, $2i+2 \notin [X_i]$ et $(2i+1, 2i) \not\equiv (2i+1, 2i+2)$. Ainsi, $G(X_{i+1})$ est indécomposable d'après le lemme 1.2. En particulier, $G - \{2n-1, 2n\}$ et $G$ sont indécomposables. Enfin, nous déduisons, à l'aide de la remarque 2.28, que $G - \{0, 1\}$ est indécomposable. En effet, il existe un isomorphisme $h$ de $G$ sur un graphe $H$ de $\mathcal{G}''$, avec $h(0) = 2n$ et $h(1) = 2n-1$. La restriction de $h$ à $S - \{0, 1\}$ est un isomorphisme de $G - \{0, 1\}$ sur $H - \{2n-1, 2n\}$. Le graphe $H - \{2n-1, n\}$ étant indécomposable d'après ce qui précède, il en est de même pour $G - \{0, 1\}$.

Soit $i \in N_{2n-1}$. D'après la remarque 2.14, il existe un isomorphisme $\sigma$ de $G(N_{2n}) - \{i, i+1\}$ sur $G(N_{2n}) - \{0, 1\}$ ou $G(N_{2n}) - \{2n-1, 2n\}$. Lorsque $S - N_{2n} \neq \emptyset$, $\sigma$ se prolonge en un isomorphisme, fixant chaque sommet de $S - N_{2n}$, de $G - \{i, i+1\}$ sur $G - \{0, 1\}$ ou $G - \{2n-1, 2n\}$. Il s'ensuit que $(i, i+1)$ est un arc de $I(G)$. De plus, pour $x \in S - \{1, 2n-1\}$, $G - \{x, 0\}$ et $G - \{x, 2n\}$ sont décomposables. Lorsque $S - N_{2n} = \{\alpha\}$, $G - \alpha$ et $G - \{\alpha, 2k\}$ sont décomposables car dans ce cas, $N_{2k} \sim \{2k+1, \cdots, 2n\}$. Lorsque $S - N_{2n} = \{\alpha, \beta\}$, $G - \alpha$, $G - \beta$, $G - \{\alpha, 2k\}$, $G - \{\beta, 2k\}$ et $G - \{\alpha, \beta\}$ sont décomposables car dans ce cas, $N_{2k} \sim \{2k+1, \cdots, 2n, \alpha\}$ et $(N_{2k} \cup \{\beta\}) \sim \{2k+1, \cdots, 2n\}$. Il s'ensuit que tous les sommets de $S - \{2k\}$ sont des sommets critiques de $G$ et que $I'(G) = P_{2n}$ d'après le lemme 2.1. De plus, $\{2k-1, 2k+1\}$ n'est pas un intervalle de $G - 2k$. En effet, si $(1, 2) \equiv (2, 1)$, alors $(0, 2k-1) \not\equiv (0, 2k+1)$. Si $(1, 2) \not\equiv (2, 1)$ et $S - N_{2n} \neq \emptyset$, alors $(\alpha, 2k-1) \not\equiv (\alpha, 2k+1)$. Supposons enfin que $(1, 2) \not\equiv (2, 1)$ et $S = N_{2n}$, alors $(0, 2k-1) \not\equiv (0, 2k+1)$ ou $(2n, 2k-1) \not\equiv (2n, 2k+1)$ suivant que $(0, 1) \not\equiv (1, 2)$ ou que $(0, 1) \equiv (1, 2)$ respectivement. Par le lemme 2.1, $2k$ est un sommet non critique de $G$. Ainsi, $G$ est (-1)-critique en $2k$. □

**Proposition 2.30.** *À des isomorphismes près, les graphes de la classe $\Omega_3$ sont les graphes d'ordre $\geq 7$ de $\mathcal{G}''$.*

*Preuve.* Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre $\geq 7$, (-1)-critique en $2k$, tel que $I'(G) = P_{2n}$, où $n \geq 2$ et $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. D'après le lemme 2.15,

$G(N_{2n}) \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$. D'après le lemme 2.27 et le corollaire 2.4, $(0,2) \equiv (1,2)$ si et seulement si $S - N_{2n} \neq \emptyset$. Supposons que $S = N_{2n}$. Si $(0,1) \equiv (1,2)$, alors $(2n-1, 2n) \not\equiv (1,2)$. Autrement, d'après le lemme 2.26, $\{2k-1, 2k+1\}$ est un intervalle non trivial du graphe indécomposable $G - \{2k\}$, contradiction. Si $k = n-1$ (resp. $k = 1$) alors $(0,2) \not\equiv (0,1)$ (resp. $(0,2) \not\equiv (2n-1, 2n)$) car sinon $\{1, \cdots, 2n-2\}$ (resp. $\{2, \cdots, 2n-1\}$) est un intervalle non trivial du graphe indécomposable $G - \{2n-1, 2n\}$ (resp. $G - \{0,1\}$), contradiction. Supposons maintenant que $S - N_{2n} \neq \emptyset$. Soit $x \in N_{2n}$ et $\gamma \in S - N_{2n}$. D'après le lemme 2.1, $(x,\gamma) \equiv (0,\gamma)$ si $x$ est pair, $(x,\gamma) \equiv (1,2)$ ou $(2,1)$ si $x$ est impair et suivant que $x < 2k$ ou que $x > 2k$ respectivement. S'il existe $\mu \in S - N_{2n}$ tel que $(1,2) \not\equiv (0,\mu) \not\equiv (2,1)$, alors $G(N_{2n} \cup \{\mu\})$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{G}''$ et, d'après le corollaire 2.4, $G = G(N_{2n} \cup \{\mu\})$. Sinon, $(1,2) \not\equiv (2,1)$ et $S - N_{2n} = E_1 \cup E_2$, où $E_1 = \{\gamma \in S - N_{2n} : (0,\gamma) \equiv (1,2)\}$ et $E_2 = \{\gamma \in S - N_{2n} : (0,\gamma) \equiv (2,1)\}$. Il existe $\alpha_1 \in E_1$ et $\alpha_2 \in E_2$ tels que $(\alpha_2, \alpha_1) \not\equiv (1,2)$ sinon $(E_2 \cup N_{2k}) \sim (E_1 \cup \{2k+1, \cdots, 2n\})$, contradiction car $G$ est indécomposable. Ainsi, $G(N_{2n} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\})$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{G}''$ et donc $G = G(N_{2n} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\})$ d'après le corollaire 2.4. □

## 2.4 Les graphes (-1)-critiques $G$ tels que $I'(G)$ est un arbre étoilé

Soient un entier $k \geq 3$, $p_1, \cdots, p_k$, $k$ entiers $\geq 2$ et $i \in \{1, \cdots, k\}$. On pose $i_0 = 0$, $S_{i_{p_i}} = \{i_0, \cdots, i_{p_i}\}$ et $S(p_1, \cdots, p_k) = \bigcup_{l=1}^{k} S_{l_{p_l}}$. On désigne par $P_{i_{p_i}}$ le chemin défini sur $S_{i_{p_i}}$ par $A(P_{i_{p_i}}) = \{(i_l, i_h), \mid l - h \mid = 1\}$ et on note $\mathcal{A}(p_1, \cdots, p_k)$ l'arbre 0-étoilé défini sur $S(p_1, \cdots, p_k)$ et dont les branches sont $P_{1_{p_1}}, \cdots, P_{k_{p_k}}$. Pour $i \neq j \in \{1, \cdots, k\}$, on considère l'application $f_{i_{p_i}, j_{p_j}}$ définie sur $S_{i_{p_i}} \cup S_{j_{p_j}}$ par $f_{i_{p_i}, j_{p_j}}(i_l) = p_i - l$ et $f_{i_{p_i}, j_{p_j}}(j_h) = p_i + h$.

**Remarque 2.31.** *Si $G$ est un graphe (-1)-critique en 0, tel que $I'(G) = \mathcal{A}(p_1, \cdots, p_k)$ alors l'application $f_{i_{p_i}, j_{p_j}}$ est un isomorphisme de $G(S_{i_{p_i}} \cup S_{j_{p_j}})$ sur un graphe $G'$ de la classe $\mathcal{G}_{p_i+p_j}(p_i)$.*

Conformément à la proposition 2.5, nous distinguons les cas, suivant que l'arbre étoilé $I'(G)$ admet ou n'admet pas une branche de longueur impaire. Nous construisons alors pour $k$ entiers non nuls $n_1$, $n_2, \cdots, n_k$ où $k \geq 3$, deux classes de graphes $\mathcal{H}(2n_1+1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$ et $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$, comme suit.

1. $\mathcal{H}(2n_1+1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$ est la classe des graphes $G$ définis sur $S(2n_1+1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$ et qui vérifient les conditions suivantes.
   - Chacun des graphes $G(\{0, 1_1\})$ et $G(\{i_1, i_2\})$, où $i \in \{2, \cdots, k\}$, est non vide.

- Pour tous $x \neq y \in S(2n_1+1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$, on a :
  - Si $(x,y) \in A_1 = \{(1_{2l+1}, 1_{2j+1}) : 0 \leq l < j \leq n_1\}$ , alors $(x,y) \equiv (1_1, 1_3)$.
  - Si $(x,y) \in A_i = \{(i_{2l+1}, i_{2j}) : 0 \leq l < j \leq n_i\}$, où $i \in \{2, \cdots, k\}$, alors $(x,y) \equiv (i_1, i_2)$.
  - Si $(x,y) \in E \cup F$, où $E = \{(i_{2j}, 1_{2l+1}) :\ 2 \leq i \leq k,\ 0 \leq j \leq n_i,\ 0 \leq l \leq n_1\}$ et $F = \{(1_{2j}, 1_{2l+1}) : 0 \leq j \leq l \leq n_1\}$ alors $(x,y) \equiv (0, 1_1)$.
  - Si $\{(x,y),(y,x)\} \bigcap ((\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \bigcup E \bigcup F) = \emptyset$, alors $G(\{x,y\})$ est vide.

2. $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$ est la classe des graphes $G$ définis sur $S(2n_1, \cdots, 2n_k)$ ou $S(2n_1, \cdots, 2n_k) \cup \{\gamma\}$, où $\gamma \notin S(2n_1, \cdots, 2n_k)$, et qui vérifient les conditions suivantes.
   - Pour tout $i \in \{1, \cdots, k\}$, le graphe $G(\{i_1, i_2\})$ est non vide.
   - Pour tous $i_p \neq j_q$ dans $S(2n_1, \cdots, 2n_2)$, on a : $i_p \longleftrightarrow j_q$ si $p$ et $q$ sont pairs et $\gamma \notin S(G)$ ; $(i_p, j_q) \equiv (i_1, i_2)$ si $i = j$, $p$ est impair, $q$ est pair et $p < q$ ; $i_p - -j_q$ dans le reste des cas.
   - Lorsque $\gamma \in S(G)$, le graphe $G(\{\gamma, 0\})$ est non vide et pour tout $i_p \in S(G) - \{\gamma\}$, $(\gamma, i_p) \equiv (\gamma, 0)$ si $p$ est pair, et $\gamma - -i_p$ si $p$ est impair.

Soit $G$ un graphe de la classe $\mathcal{H}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$, où $p_1 = 2n_1$ ou $2n_1+1$, $p_r = 2n_r$ pour $r \in \{2, \cdots k\}$, et soient $i \neq j$ dans $\{1, \cdots, k\}$. Notons les remarques suivantes.

**Remarque 2.32.** *Pour tout $q \in \{0, \cdots, p_i - 1\}$, l'application $g_{i_{p_i}, q}$ définie sur $S(G)$ par $g_{i_{p_i}, q}(x) = i_{l-2}$ si $x = i_l$ avec $l \geq q+2$, et $g_{i_{p_i}, q}(x) = x$ sinon, est un isomorphisme de $G - \{i_q, i_{q+1}\}$ sur $G - \{i_{p_i - 1}, i_{p_i}\}$.*

**Remarque 2.33.** *L'application $f_{i_{p_i}, j_{p_j}}$ est un isomorphisme de $G(S_{i_{p_i}} \cup S_{j_{p_j}})$ sur un graphe de la classe $\mathcal{G}_{p_i+p_j}(p_i)$. De plus, si $\gamma \in S(G)$ alors $G(S_{i_{p_i}} \cup S_{j_{p_j}} \cup \{\gamma\})$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{G}''$, en particulier, il s'agit d'un graphe (-1)-critique.*

**Lemme 2.34.** *Étant donné un graphe $G$ de la classe $\mathcal{H}(2n_1+1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$, $G$ est (-1)-critique en $0$ et $I(G) = \mathcal{A}(2n_1+1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$.*

*Preuve.* Posons $n = \mid S(2n_1+1, 2n_2, \cdots, 2n_k) \mid$, $p_1 = 2n_1+1$ et $p_i = 2n_i$ pour $i \in \{2, \cdots, k\}$. Notons que $n$ est pair et $n \geq 8$. Nous montrons par récurrence sur $n$, que les graphes $G$ et $G - \{i_{p_i}, i_{p_i - 1}\}$, où $i \in \{1, \cdots, k\}$, sont indécomposables. Supposons d'abord que $G$ est d'ordre $n = 8$, c'est-à-dire $G \in \mathcal{H}(3,2,2)$. L'application $f$ définie par $f(2_2) = 0$ , $f(2_1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(3_1) = 3$, $f(3_2) = 4$ et $f(1_1) = \alpha$, est un isomorphisme de $G - \{1_2, 1_3\}$ sur un graphe $G'$. On vérifie que $G'$ est un graphe de la classe $\mathcal{G}''$, en particulier $G-\{1_2,1_3\}$ est indécomposable. D'après la remarque 2.33 et le lemme 2.18, les graphes $G-\{2_1,2_2\}$ et $G-\{3_1,3_2\}$ sont indécomposables. De plus, $3_1 \in [S(G-\{3_1,3_2\})]$, $3_2 \notin [S(G-\{3_1,3_2\})]$ et $(3_1,3_2) \not\equiv (3_1,0)$, donc $G$ est indécomposable. Supposons maintenant que $G$ est d'ordre $n \geq 10$. Si pour tout $t \in \{1,\cdots,k\}$, $p_t \leq 3$, c'est-à-dire $G \in \mathcal{H}(3,2,2,\cdots,2)$, alors $k \geq 4$ et $G-\{k_{p_k},k_{p_k-1}\} \in \mathcal{H}(p_1,\cdots,p_{k-1})$. Sinon, il existe $t \in \{1,\cdots,k\}$ tel que $p_t \geq 4$ et donc $G-\{t_{p_t},t_{p_t-1}\} \in \mathcal{H}(q_1,\cdots,q_k)$, où $q_t = p_t - 2$ et pour tout $r \in \{1,\cdots,k\}-\{t\}$, $q_r = p_r$. Il s'ensuit en appliquant l'hypothèse de récurrence, qu'il existe $l \in \{1,\cdots,k\}$ tel que $G-\{l_{p_l},l_{p_l-1}\}$ est indécomposable, et tel que pour tout $m \in \{1,\cdots,k\}-\{l\}$, $G-\{l_{p_l},l_{p_l-1},m_{p_m},m_{p_m-1}\}$ est indécomposable. On vérifie maintenant que $G-\{m_{p_m},m_{p_m-1}\}$ et $G$ sont indécomposables en utilisant le lemme 1.2 avec les parties $X = S(G)-\{l_{p_l},l_{p_l-1},m_{p_m},m_{p_m-1}\}$ et $Y = S(G)-\{m_{p_m},m_{p_m-1}\}$. En effet, $l_{p_l-1} \in [X]$, $l_{p_l} \notin [X]$ et $(l_{p_l-1},l_{p_l}) \not\equiv (l_{p_l-1},1_1)$, donc $G-\{m_{p_m},m_{p_m-1}\}$ est indécomposable. De plus, $m_{p_m-1} \in [Y]$, $m_{p_m} \notin [Y]$ et $(m_{p_m-1},m_{p_m}) \not\equiv (m_{p_m-1},1_1)$, donc $G$ est indécomposable.

Soit $j \in \{1,\cdots,k\}$. On a $S(G)-\{j_{p_j},j_{p_j-1}\}$ est un intervalle non trivial de $G-j_{p_j}$. De plus, pour tout $l \in \{1,\cdots,p_j-1\}$, $\{j_{l-1},j_{l+1}\}$ est un intervalle de $G-j_l$. Il s'ensuit que tous les sommets de $G-0$ sont des sommets critiques de $G$. Comme $G-\{j_{p_j},j_{p_j-1}\}$ est indécomposable, les arcs de $\mathcal{A}(p_1,p_2,\cdots,p_k)$ sont des arcs de $I(G)$ d'après la remarque 2.32. Nous concluons, en utilisant le lemmes 2.1 et la proposition 2.5, que $G$ est (-1)-critique en 0 et que $I(G) = \mathcal{A}(p_1,p_2,\cdots,p_k)$. □

**Proposition 2.35.** *Les graphes $G$ d'ordre $\geq 7$, (-1)-critiques en 0 et tels que $I'(G) = \mathcal{A}(2n_1+1,2n_2,\cdots,2n_k)$ sont, aux complémentaires près, les graphes de la classe $\mathcal{H}(2n_1+1,2n_2,\cdots,2n_k)$.*

*Preuve.* Soit $G = (S,A)$ un graphe (-1)-critique en 0 tel que $I'(G) = \mathcal{A}(2n_1+1,2n_2,\cdots,2n_k)$. Montrons que $G$ ou $\overline{G}$ est un graphe de $\mathcal{H}(2n_1+1,2n_2,\cdots,2n_k)$. Notons que pour $i \neq j$ dans $\{2,\cdots,k\}$, on a $(1_{2n_1},1_{2n_1-1}) \equiv (1_{2n_1},i_{2n_i-1}) \equiv (j_{2n_j-1},i_{2n_i-1}) \equiv (j_{2n_j-1},1_{2n_1}) \equiv (1_{2n_1-1},1_{2n_1})$.

Ainsi, le graphe $G(\{1_{2n_1},1_{2n_1-1}\})$ est complet ou vide. Quitte à remplacer $G$ par $\overline{G}$, on peut supposer que $1_{2n_1} - -1_{2n_1-1}$. Nous vérifions à l'aide de la remarque 2.31 et des lemmes 2.17 et 2.26, que $G(S(2n_1+1,2n_2\cdots,2n_k))$ est un graphe de la classe $\mathcal{H}(2n_1+1,2n_2\cdots,2n_k)$. Ce graphe étant indécomposable d'après le lemme 2.32,
$G = G(S(2n_1+1,2n_2,\cdots,2n_k))$ d'après le corollaire 2.4. □

**Lemme 2.36.** *Étant donné un graphe $G$ de la classe $\mathcal{H}(2n_1,\cdots,2n_k)$, $G$ est (-1)-critique en 0 et $I'(G) = \mathcal{A}(2n_1,\cdots,2n_k)$.*

*Preuve.* Posons $n = \mid S(G) \mid$ et $p_i = 2n_i$ pour $i \in \{1, \cdots, k\}$. Notons que $n \geq 7$. Nous montrons par récurrence sur $n$, que les graphes $G$ et $G - \{i_{p_i}, i_{p_i-1}\}$, où $i \in \{1, \cdots, k\}$, sont indécomposables. Supposons d'abord que $G$ est d'ordre $n = 7$, c'est-à-dire $G \in \mathcal{H}(2,2,2)$ et $S(G) = S(2,2,2)$. D'après la remarque 2.33 et le lemme 2.27, les graphes $G - \{1_1, 1_2\}$, $G - \{2_1, 2_2\}$ et $G - \{3_1, 3_2\}$ sont indécomposables. De plus, $3_1 \in [S(2,2,2) - \{3_1, 3_2\}]$ , $3_2 \notin [S(2,2,2) - \{3_1, 3_2\}]$ et $(3_1, 3_2) \not\equiv (3_1, 0)$, donc $G$ est indécomposable. Supposons maintenant que $G$ est d'ordre $n \geq 8$. Soit $i \in \{1, \cdots, k\}$. Si $p_i = 2$ et $k = 3$ alors, d'après la remarque 2.33, $G - \{i_{p_i}, i_{p_i-1}\}$ est indécomposable. Sinon, ou bien $p_i = 2$ et $k \geq 4$, ou bien $p_i \geq 4$. Dans le premier cas, $G - \{i_{p_i}, i_{p_i-1}\}$ est isomorphe à un graphe de la classe $\mathcal{H}(q_1, \cdots, q_{k-1})$, où pour tout $t \in \{1, \cdots, k-1\}$, $q_t = p_t$ (resp. $p_{t+1}$) si $t < i$ (resp. si $t \geq i$). Dans le deuxième cas, $G \in \mathcal{H}(r_1, \cdots, r_k)$, où $r_i = p_i - 2$ et pour tout $t \in \{1, \cdots, k\} - \{i\}$, $r_t = p_t$. Il s'ensuit dans les deux cas, que $G - \{i_{p_i}, i_{p_i-1}\}$ est indécomposable par hypothèse de récurrence. Par construction de la classe $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$, $i_{p_i-1} \in [X]$, $i_{p_i} \notin [X]$, où $X = S(G) - \{i_{p_i}, i_{p_i-1}\}$, et $(i_{p_i-1}, i_{p_i}) \not\equiv (i_{p_i-1}, 0)$, donc $G$ est indécomposable.

Soit $j \in \{1, \cdots, k\}$. Encore par construction de la classe $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$, pour tout $l \in \{1, \cdots, p_j - 1\}$, $\{j_{l-1}, j_{l+1}\}$ est un intervalle de $G - j_l$ et $S(G) - \{j_{p_j-1}, j_{p_j}\}$ est un intervalle non trivial de $G - j_{p_j}$. De plus, si $\gamma \in S(G)$, alors $(S_{j_{p_j}}) - -(S(G-\gamma) - S_{j_{p_j}})$, et donc $S_{j_{p_j}}$ est un intervalle non trivial de $G - \gamma$. Il s'ensuit que tous les sommets de $G - 0$ sont des sommets critiques de $G$. Comme $G - \{j_{p_j}, j_{p_j-1}\}$ est indécomposable, les arcs de $\mathcal{A}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ sont des arcs de $I(G)$ d'après la remarque 2.32. Il s'ensuit d'après le lemmes 2.1, que $G$ est (-1)-critique en 0. De plus, lorsque $\gamma \in S(G)$, $S(G) - \{\gamma, j_{p_{j-1}}, j_{p_j}\}$ est un intervalle non trivial de $G - \{\gamma, j_{p_j}\}$, de sorte que d'après la proposition 2.5, $\gamma$ est un sommet isolé de $I(G)$. Encore par la la proposition 2.5, $I'(G) = \mathcal{A}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$. □

**Proposition 2.37.** *Les graphes $G$ d'ordre $\geq 7$, (-1)-critiques en $0$ et tels que $I'(G) = \mathcal{A}(2n_1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$ sont, aux complémentaires près, les graphes de la classe $\mathcal{H}(2n_1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$.*

*Preuve.* Soit $G = (S, A)$ un graphe (-1)-critique en 0 tel que $I'(G) = \mathcal{A}(2n_1, \cdots, 2n_k)$. Montrons que $G$ ou $\overline{G}$ est un graphe de $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$. D'après la remarque 2.31 et le lemme 2.26, pour $i \in \{2, \cdots, k\}$, $(i_{2n_i}, i_{2n_i-2}) \equiv (1_{2n_1-2}, 1_{2n_1})$ et $(i_{2n_i-1}, i_{2n_i-2}) \equiv (1_{2n_1-2}, 1_{2n_1-1})$. D'autre part, pour $i \neq j$ dans $\{2, \cdots, k\}$, $(1_{2n_1}, 1_{2n_1-2}) \equiv (1_{2n_1}, i_{2n_i}) \equiv (j_{2n_j}, i_{2n_i}) \equiv (j_{2n_j}, 1_{2n_1}) \equiv (1_{2n_1-2}, 1_{2n_1})$ et $(1_{2n_1-1}, 1_{2n_1-2}) \equiv (1_{2n_1-1}, i_{2n_i-1}) \equiv (j_{2n_j-1}, i_{2n_i-1}) \equiv (j_{2n_j-1}, 1_{2n_1-1}) \equiv (1_{2n_1-2}, 1_{2n_1-1})$. Les graphes $G(\{1_{2n_1-2}, 1_{2n_1}\})$ et $G(\{1_{2n_1-2}, 1_{2n_1-1}\})$ sont alors vides ou complets. Quitte à remplacer $G$ par $\overline{G}$, on peut supposer qu'ou bien $1_{2n_1-2} \longleftrightarrow 1_{2n_1}$ et $1_{2n_1-2} - - 1_{2n_1-1}$, ou bien $1_{2n_1-2} - -\{1_{2n_1-1}, 1_{2n_1}\}$. Supposons d'abord que $1_{2n_1-2} \longleftrightarrow 1_{2n_1}$ et $1_{2n_1-2} - -1_{2n_1-1}$. Nous vérifions en utilisant la remarque 2.31 et le lemme 2.26, que $G(S(2n_1, \cdots, 2n_k))$ est un graphe de la classe $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$. Ce graphe étant indécomposable d'après le lemme 2.36, $G = G(S(2n_1, \cdots, 2n_k))$ d'après le corollaire 2.4. Supposons maintenant que $1_{2n_1-2} - -\{1_{2n_1-1}, 1_{2n_1}\}$. On a $0 - -(S(2n_1, \cdots, 2n_k) - \{0\})$. Comme $G$ est indécomposable il existe $\gamma \in S(G) - S(2n_1, \cdots, 2n_k)$ tel que le graphe $G(\{0, \gamma\})$ est non vide. En utilisant encore la remarque 2.31 et le lemme 2.26, on vérifie que $G(S(2n_1, \cdots, 2n_k) \cup \{\gamma\})$ est un graphe de la classe $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$. Ce graphe étant indécomposable d'après le lemme 2.36, $G = G(S(2n_1, \cdots, 2n_k) \cup \{\gamma\})$ d'après le corollaire 2.4. □

En conclusion nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 2.38.** *Les graphes $G$ d'ordre $\geq 7$ et $(-1)$-critiques sont, à isomorphisme près, les graphes $H_{2n+1}$, $\overline{H_{2n+1}}$, $R_{2n+1}$, $\overline{R_{2n+1}}$ où $n \geq 3$ ; les graphes d'ordre $\geq 7$ de la classe $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''$ ; les graphes de la classe $\mathcal{H}(2n_1 + 1, 2n_2, \cdots, 2n_k) \cup \mathcal{H}(2n_1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$ et leurs complémentaires.*

Concernant les graphes $(-1)$-critiques d'ordre $\leq 6$, d'après le lemme 2.11, la classe $\mathcal{F}$ nous donne une famille de ces graphes. Remarquons alors que le lemme 2.3, outil important dans notre classification des graphes $(-1)$-critiques, ne s'étend pas à leur cas. Par exemple, le graphe $Q_5 = (\{0, 1, 2, \alpha, \beta\}, \{(0, 1), (1, 0), (0, 2), (2, 0), (0, \beta), (\beta, 0), (2, \beta), (\beta, 2), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha)\})$ est un graphe $(-1)$-critique de la classe $\mathcal{F}$ dont le graphe d'indécomposabilité est vide.

# Références


[1] H. Belkhechine, I. Boudabbous et J. Dammak, Les tournois (-1)-critiques. *Communications in Mathematical Analysis.* 3, (2007), pp. 83-97.

[2] I. Boudabbous et P. Ille, Critical and infinite directed graphs. *Discrete Math.* 307 (2007), pp. 2415-2428.

[3] Y. Boudabbous et P. Ille, Indecoposability graph and critical vertices of an indecomposable graph. *Discrete Math.* 309 (2009), pp. 2839-2846.

[4] A. Ehrenfeucht et G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures. *Theoret. Comput. Sci.* 3 (70) (1990), pp. 343-358.

[5] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation . *in : Orders, Description and Roles, M. Pouzet et D. Richard éd. North-Holland.* (1984), pp. 313-342.

[6] P. Ille, 1993, Recognition problem in reconstruction for decomposable relations. *B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow (Eds.), Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic, Kluwer Academic Publishers.* (1993), pp. 189-198.

[7] P. Ille, Indecomposable graphs. *Discrete Math.* 173 (1997), pp. 71-78.

[8] J.H. Schmerl et W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures. *Discrete Math.* 113 (1993), pp. 191-205.