La ($\leq k$)-demi-reconstructibilité des graphes pour $7 \leq k \leq 12$

May 28, 2010

Nadia El Amri

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Monastir, Université de Monastir, Avenue de l'environnement 5019, Monastir, Tunisie.
Adresse e-mail: nadia_elamri@hotmail.fr

Abstract

Let $G = (V, A)$ be a graph. For every subset X of V is associated the sub-graph $G(X) = (X, A\cap(X \times X))$ of G induced by X. The dual of G is the graph $G^* = (V, A^*)$ such that, $A^* = \{(x, y) : (y, x) \in A\}$. A graph G' is hemimorphic to G if it is isomorphic to G or G^*. Let an integer $k \geq 1$. A graph G' defined on the same vertex set V of G is ($\leq k$)-hypomorphic (resp. ($\leq k$)-hemimorphic) to G if for all subset X of V on at most k elements, the sub-graphs $G(X)$ and $G'(X)$ are isomorphic (resp. hemimorphic). G is called ($\leq k$)-reconstructible (resp. ($\leq k$)-half-reconstructible) provided that every graph G' which is ($\leq k$)-hypomorphic (resp. ($\leq k$)-hemimorphic) to G is hypomorphic (resp. hemimorphic) to G. In 1972, G. Lopez [14, 15] established that the finite graphs are (≤ 6)-reconstructible. For $k \in \{3, 4, 5\}$, the ($\leq k$)-reconstructibility problem for the finite graphs was studied by Y. Boudabbous and G. Lopez in [1, 5]. In 2006, Y. Boudabbous and C. Delhommé [4] characterized, for each $k \geq 4$, all ($\leq k$)-reconstructible graphs. In 1993, J. G. Hagendorf and G. Lopez showed in [12] that the finite graphs are (≤ 12)-half-reconstructible. After that, in 2003, J. Dammak [8] characterized the ($\leq k$)-half-reconstructible finite graphs, for every $7 \leq k \leq 11$. In this paper we characterize for each integer $7 \leq k \leq 12$, all ($\leq k$)-half-reconstructible graphs.

ARS COMBINATORIA 122(2015), pp. 193-226

1 Introduction

Un *graphe orienté* (ou tout simplement graphe) est un couple $G = (S, A)$ dans lequel S est un ensemble appelé ensemble des *sommets* de G et A est un ensemble de couples d'éléments distincts de S, appelé ensemble des *arcs* de G. Pour tous éléments distincts x, y de S, la notation $x \longleftrightarrow y$ signifie $(x, y), (y, x) \in A$ et on dit dans ce cas que $\{x, y\}$ est une arête pleine. La notation $x - -y$ signifie $(x, y), (y, x) \notin A$ et on dit dans ce cas que $\{x, y\}$ est une arête vide. La notation $x \longrightarrow y$ signifie $(x, y) \in A$ et $(y, x) \notin A$. Une paire $\{x, y\}$ d'éléments distincts de S est dite arête neutre de G si $x \longleftrightarrow y$ ou $x - -y$ et dans le cas contraire on dit que l'arête est orientée. Pour tout $x \in S$, pour tout $Y \subseteq (S - \{x\})$, $x \longrightarrow Y$ (resp. $Y \longrightarrow x$) signifie $x \longrightarrow y$ (resp. $y \longrightarrow x$) pour tout $y \in Y$. On définit de même $x \longleftrightarrow Y$ et $x - -Y$.

Soit $G = (S, A)$ un graphe. *Le dual* de G est le graphe $G^* = (S, A^*)$ où, $A^* = \{(x, y) : (y, x) \in A\}$. À chaque partie X de S est associé le *sous-graphe* $G(X)$ de G (induit par X) défini par: $G(X) = (X, A \cap (X \times X))$. On dit qu'une partie X de S vérifie une propriété $\mathcal{P}$, si le sous-graphe $G(X)$ vérifie $\mathcal{P}$.

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes. Une bijection f de S sur S' est un *isomorphisme* de G sur G' lorsque pour $x \in S$, $y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que G et G' sont isomorphes et on note $G \simeq G'$. Un *hémimorphisme* de G sur G' est soit un isomorphisme de G sur G' soit un isomorphisme de G^* sur G'.

Soient un entier $k \geq 1$ et un graphe $G = (S, A)$. Si G est isomorphe à son dual, on dit que G est *autodual*. Le graphe G abrite un graphe H, si H est isomorphe à un sous-graphe de G. Soit G' un graphe ayant le même ensemble des sommets S que G. Le graphe G' est $(\leq k)$-hypomorphe (resp. $(\leq k)$-hémimorphe) à G lorsque pour toute partie X de S ayant au plus k sommets, les sous-graphes $G(X)$ et $G'(X)$ sont isomorphes (resp. hémimorphes). Les graphes G et G' sont finiment isomorphes si pour toute partie finie X de S les sous-graphes $G(X)$ et $G'(X)$ sont isomorphes. Le graphe G est $(\leq k)$-autodual si G est $(\leq k)$-hypomorphe à son dual. Le graphe G est $(\leq k)$-reconstructible (resp. $(\leq k)$-demi-reconstructible) lorsque tout graphe $(\leq k)$-hypomorphe (resp. $(\leq k)$-hémimorphe) à G lui est isomorphe (resp. hémimorphe).

Suite au problème de la $(\leq k)$-reconstructibilité posé par R. Fraïssé [11], G. Lopez [14, 15] a établi, en 1972, le résultat suivant.

Théorème 1 *[14, 15] Les graphes finis sont* (≤ 6)*-recontructibles.*

Ensuite, pour $k \in \{3, 4, 5\}$, le problème de la $(\leq k)$-reconstructibilité des graphes finis a été étudié par Y. Boudabbous et G. Lopez dans [1, 5].

En 1993, J.G.Hagendorf a élargi [12] la problématique de la reconstruction à la demi-reconstruction. Dans [12] J.G.Hagendorf et G.Lopez ont montré que les graphes finis sont (≤ 12)-demi-reconstructibles. Ensuite, en 2003, J.Dammak [8] a caractérisé les graphes finis ($\leq k$)-demi-reconstructibles pour tout $7 \leq k \leq 11$.

Enfin, en 2006, Y. Boudabbous et C. Delhommé ont étudié la ($\leq k$)-autodualité [3], puis la ($\leq k$)-reconstructibilité [4], des graphes (finis ou infinis). Ils ont ainsi retrouvé en les prolongeant au cas infini, des résultats de G. Lopez [16] et Y. Boudabbous [1]. Cette dernière étude a motivé notre présent travail sur la ($\leq k$)-demi-reconstructibilité des graphes (finis ou infinis). Ce travail est basé sur les résultats de [3] et [7] et sur le principe de "déformation" introduit dans [4]. Nous caractérisons en premier temps les graphes infinis (≤ 12)-demi-reconstructibles. Ensuite, nous caractérisons pour tout entier $7 \leq k \leq 11$, les graphes ($\leq k$)-demi-reconstructibles. Ainsi, nous retrouvons en les étendant à l'infini les résultats de J.Dammak [8]. Notons que la caractérisation des graphes ($\leq k$)-demi-reconstructibles pour $k \in \{11, 12\}$ a été publiée sans preuve dans [10].

2 Préliminaires

2.1 Graphes particuliers

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Définissons sur S une relation notée $\Re$ comme suit: pour tout élément x de S, $x\Re x$ et pour tous éléments distincts x, y de S, $x\Re y$ s'il existe une séquence $x = x_0, ..., x_n = y$ telle que: pour tout i élément de $\{0, ..., n-1\}$, la paire $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête orientée. Cette relation est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de cette relation sont les *composantes connexes orientées* de G. Un graphe qui admet une seule composante connexe orientée est dit *graphe connexe orienté*.

Un *tournoi* est un graphe dont toutes les arêtes sont orientées. Un tournoi $T = (S, A)$ est dit *transitif*, *ordre total* ou *chaîne*, si $\forall x, y, z \in S$, si ($x \longrightarrow y$ et $y \longrightarrow z$), alors $x \longrightarrow z$. L' ordre total usuel sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (resp. sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$) est dit un ordre total de type ω (resp. $\omega^* + \omega$). Tout graphe isomorphe à l'un des graphes obtenus à partir d'un ordre total fini d'au moins trois sommets (resp. de type ω, ω^* ou $\omega^* + \omega$) en rendant, toutes pleines ou toutes vides, les arêtes reliant deux sommets non consécutifs est appelé une *consécutivité finie* (resp. *consécutivité infinie*). À un isomorphisme près il existe 6 (resp. 2) consécutivités infinies (resp. consécutivités finies à n sommets pour chaque entier $n \geq 3$). Celles qui sont définies sur l'ordre total de type ω ou ω^* sont non autoduales et elles sont dites les *consécutivités infinies à une* *seule extrémité.*

Un *cycle* est un graphe obtenu à partir d'une consécutivité finie à $p \geq 3$ sommets en modifiant le lien entre ses extrémités par $a_p \longrightarrow a_1$, où a_1 et a_p sont les extrémités initiale et finale respectivement.

Pour tout entier $p \geq 3$, on appelle *p-consécutivité* (resp. *p-cycle*) toute consécutivité (resp. tout cycle) à p sommets.

On appelle *pic* tout graphe isomorphe à un graphe à 3 sommets a, b, c tels que $\{a, b\}$ est une arête neutre et $\{a, b\} \longrightarrow c$ ou $c \longrightarrow \{a, b\}$.

On appelle *diamant* tout graphe isomorphe à un tournoi T à 4 sommets a, b, c, d tels que $T(\{a, b, c\})$ est un cycle à 3 éléments et $\{a, b, c\} \longrightarrow d$ ou $d \longrightarrow \{a, b, c\}$.

Tout graphe à 3 sommets qui contient 3 arêtes de types différents est appelé *drapeau.*

2.2 Module, module fort, partition modulaire, composante modulaire

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Une partie M de S est un *module* de G si pour tous éléments a, b de M et x de $S - M$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$, et $(x, a) \in A$ si et seulement si $(x, b) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, S et les singletons $\{x\}$, où $x \in S$, sont des modules de G appelés modules *triviaux*. Un graphe est *indécomposable* si tous ses modules sont triviaux; dans le cas contraire, il est *décomposable*

Une partition P de S est une *partition modulaire* de G si tous ses éléments sont des modules de G. À chaque partition modulaire P de G est associé le *graphe quotient* $G/P = (P, A/P)$ de G par P défini comme suit: pour tous $X, Y \in P$ avec $X \neq Y$, $(X, Y) \in A/P$ si pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, on a $(x, y) \in A$.

Une partie X de S est un *module fort* de G si X est un module de G et si pour tout module Y de G tel que $X \cap Y \neq \emptyset$ on a $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$. Par exemple, les modules triviaux sont forts.

Soient $G = (S, A)$ et $H = (S', A')$ deux graphes tels que $S \cap S' = \emptyset$ et x un sommet de G. Le dilaté de G par H en x, est le graphe obtenu à partir de G en remplaçant le sommet x par H de manière que S' sera un module du graphe obtenu.

Définition 2 *[6] Soit $G = (S, A)$ un graphe.*

1. *Le graphe G est dit robuste si ses modules forts propres maximaux forment une partition de S ou si S est un singleton.*

2. *Si G est robuste et si $| S | \geq 2$, on appelle composantes modulaires de G, ses modules forts propres maximaux et on appelle partition canon-*

ique de G, la partition de S formée par les composantes modulaires de G.

3. *Si $\mid S \mid \leq 1$, on appelle partition canonique de G, l'unique partition de S.*

4. *Si G est robuste, on appelle trame de G, son quotient par sa partition canonique.*

Dans ce papier nous utilisons la notation suivante.

Notation 3 *Étant donné un graphe robuste G, on notera $\mathcal{P}_C(G)$ sa partition canonique et par $\mathcal{T}_G$ son trame.*

Proposition 4 *[9] Le trame d'un graphe robuste est une chaîne, ou un graphe dont toutes les arêtes sont vides, ou un graphe dont toutes les arêtes sont pleines, ou un graphe indécomposable d'au moins trois sommets.*

2.3 Classe de différence

La notion suivante de *classe de différence* introduite par G. Lopez en 1972 [14, 15] joue un rôle essentiel dans ce papier.

2.3.1 Définition

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$ deux graphes ($\leq$2)-hémimorphes. La relation de différence de G et G' est la relation d'équivalence $D_{G,G'}$ définie sur S comme suit: pour tout élément x de S, $xD_{G,G'}x$ et pour tous éléments distincts x, y de S, $xD_{G,G'}y$ s'il existe une séquence finie $x_0 = x, ..., x_n = y$ d'éléments de S telle que pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$ si et seulement si $(x_i, x_{i+1}) \notin A'$. Les classes d'équivalence de $D_{G,G'}$ sont appelées les classes de différence de G et G'. Notons $cl(D_{G,G'})$ la famille des classes de différence de G et G'.

Rappelons d'abord le résultat suivant qui permet le passage du fini à l'infini.

Lemme 5 *[2] Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$ deux graphes infinis ($\leq$ 2)-hypomorphes et C une partie infinie de S. Alors l'équivalence $D_{G(C),G'(C)}$ admet une seule classe si et seulement si pour toute partie finie X de C, il existe une partie finie Y de C contenant X, telle que l'équivalence $D_{G(Y),G'(Y)}$ admet une seule classe.*

Dans le cas fini la caractérisation des classes de différence sous l'hypothèse de la ($\leq k$)-hypomorphie a été obtenue par G. Lopez [16] pour $k = 6$, par Y. Boudabbous [1] pour $k = 5$ et par G. Lopez et C. Rauzy [17] pour $k = 4$. Ensuite, en 2006, Y. Boudabbous et C. Delhommé ont étudié l'autodualité des graphes (finis ou infinis). Dans cette étude, ils ont introduit les préchaînes.

2.3.2 Définitions [3, 4]

On appelle *préchaîne* tout graphe dont aucun de ses sous-graphes n'est isomorphe ni à un pic ni à un diamant et tel que toutes éventuelles deux arêtes neutres ne sont jamais adjacentes. Toute préchaîne qui n'est pas un ordre total est appellée *préchaîne propre.* On appelle *presque-ordre total* tout graphe obtenu en dilatant un sommet d'un 3-cycle ou le sommet non adjacent à l'arête neutre d'une 3-consécutivité, par un ordre total. Clairement, un presque-ordre total est une préchaîne.

2.3.3 Structure des préchaînes

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés des préchaînes.

Proposition 6 *[3]*

1. *Les préchaînes à au moins trois sommets sont connexes orientées.*
2. *Chaque arête orientée d'une préchaîne propre est adjacente à une autre arête orientée.*
3. *Toute préchaîne infinie contient une chaîne infinie.*
4. *Les modules propres d'une préchaîne sont des chaînes.*
5. *Toute préchaîne propore est robuste, son trame est une préchaîne propre indécomposable et ses composantes modulaires sont des chaînes.*
6. *Les préchaînes tournois (resp. les préchaînes) sont (≤ 5)-autoduales (resp. (≤ 4)-autoduales).*

Il est à noter que les préchaînes finies ont été décrites par G. Lopez et C. Rauzy dans leur étude de l'hypothèse de la (≤ 4)-hypomorphic [17].

2.3.4 Préchaîne et hypomorphie

Lemme 7 *[4] Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$ deux graphes ($\leq$3)-hypomorphes.*
Si G est une préchaîne propre, alors:

1. *G' est une préchaîne propre.*

2. $\mathcal{P}_C(G) = \mathcal{P}_C(G')$.

3. $\mathcal{T}_{G'} = \mathcal{T}_G$ *ou* $\mathcal{T}_{G'} = \mathcal{T}_{G^*}$. *En particulier, si G est indécomposable, alors $G' \in \{G, G^*\}$.*

4. *Pour chaque partie X de S admettant une intersection finie avec chaque composante modulaire de G on a: $G'(X) \simeq G(X)$ si $\mathcal{T}_{G'} = \mathcal{T}_G$ et $G'(X) \simeq G^*(X)$ si $\mathcal{T}_{G'} = \mathcal{T}_{G^*}$.*

2.3.5 Caractérisation des classes de différence

Suite à leur étude de la ($\leq k$)-reconstructibilité des graphes (finis ou infinis) [4], Y. Boudabbous et C. Delhommé ont établi en particulier les résultats suivants qui prolongent ceux qui sont obtenus dans le cas fini dans [1, 5, 16, 17].

Lemme 8 *[4] Soient G et G' deux graphes (≤ 3)-hypomorphes et C une classe de $D_{G,G'}$.*

1. *$G(C)$ est connexe orienté.*

2. *$cl(D_{G,G'})$ est une partition modulaire de G et G' et $G/cl(D_{G,G'}) = G'/cl(D_{G,G'})$.*

3. *Si C contient une partie A telle que $G(A)$ est une consécutivité, alors $G'(A) = G^*(A)$.*

4. *Si G et G' sont $\{4\}$-hypomorphes et C contient une partie A telle que $G(A)$ est un cycle, alors $G'(A) = G^*(A)$.*

5. *Si $G(X) \simeq G'(X)$ pour chaque élément X de $cl(D_{G,G'})$, alors $G' \simeq G$.*

Lemme 9 *[3, 4] Soient un entier $d \geq 4$, G et G' deux graphes ($\leq d$)-hypomorphes et C une classe de $D_{G,G'}$ telle que $|C| \geq 8$.*

1. *Si $d = 4$, $G(C)$ est un ordre total, ou un presque-ordre total, ou une consécutivité, ou un cycle, ou une préchaîne propre.*

2. *Si $d = 5$, $G(C)$ est un ordre total, ou un presque-ordre total, ou un cycle, ou une consécutivité, ou une préchaîne propre tournoi.*

3. *Si $d = 6$, $G(C)$ est un ordre total, ou un presque-ordre total, ou un cycle ou une consécutivité.*

4. *$G(C)$ est ($\leq d$)-autodual.*

5. *Si X est une classe de $D_{G,G'}$ et $G(X)$ n'admet aucun module de type chaîne infinie, alors $G'(X)$ et $G^*(X)$ sont isomorphes.*

Lemme 10 *[4] Soient un entier $d \geq 4$, G et G' deux graphes ($\leq d$)-hypomorphes et C une classe non autoduale de $D_{G,G'}$.*

1. *Si $d = 4$, $G(C)$ est une consécutivité infinie à une seule extrémité, ou un ordre total infini, ou un presque-ordre total infini ou une préchaîne propre.*

2. *Si $d = 5$, $G(C)$ est une consécutivité infinie à une seule extrémité, ou un ordre total infini ou un presque-ordre total infini, ou une préchaîne propre tournoi.*

3. *Si $d = 6$, $G(C)$ est une consécutivité infinie à une seule extrémité, ou un ordre total infini, ou un presque-ordre total infini.*

Rappelons aussi ce résultat obtenu par J. G. Hagendorf et G. Lopez.

Lemme 11 *[13] Soient G et G' deux graphes (≤ 3)-hypomorphes et C une classe de $D_{G,G'}$. Si $G(C)$ n'est pas un tournoi, alors $G(C)$ abrite une 3-consécutivité qui s'inverse dans $G'(C)$.*

La notation suivante est utile pour la suite.

Notation 12 *Soit $G = (S, A)$ un graphe. Si G admet au moins un sous-graphe fini non autodual, on note $C_{n.a}(G)$ le plus petit cardinal des sous-graphes non autoduaux de G. Lorsque le graphe G n'admet aucun sous-graphe fini non autodual, on convient de dire que $C_{n.a}(G)$ est infini.*

Le résultat suivant dû à J.Dammak [7] joue un rôle essentiel dans ce papier.

Proposition 13 *[7] Soient un entier $d \geq 5$, $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$ deux graphes finis ($\leq d$)-hémimorphes et C une classe de l'équivalence $D_{G,G'}$.*

1. *Si C est différente de sa composante connexe orientée, alors C est un module de G et G' et $G(C)$ et $G'(C)$ sont ($\leq d-1$)-hypomorphes.*

2. *Si I_0 est une partie de C telle que $\mid I_0 \mid = C_{n.a}(G)$ et $G(I_0)$ est non autodual, alors $G'(I_0) \simeq G^*(I_0)$.*

3. *Si I_0 est une partie de S telle que $\mid I_0 \mid = C_{n.a}(G)$, $G(I_0)$ est non autodual et $G(I_0) \simeq G'(I_0)$, alors:*
   (i) C est un module de G et G'.
   (ii) Si en plus, $G(I_0)$ est un drapeau et $C \cap I_0 \neq \emptyset$, alors $G(C)$ et $G'(C)$ sont ($\leq d-2$)-hypomorphes.
   (iii) $G(C)$ et $G'(C)$ sont ($\leq$ max ($C_{n.a}(G)$-1, d - $C_{n.a}(G)$))-hypomorphes.

Finissons cette section par les résultats suivants dont le premier est obtenu par J. Dammak [7] et les autres sont obtenus par J. G. Hagendorf et G. Lopez [12].

Lemme 14 *[7] Les graphes connexes orientés finis sont* (≤ 7)*-demi-reconst ructibles.*

Théorème 15 *[12] Si G et G' sont deux graphes finis* (≤ 12)*-hémimorphes, alors G et G' ou G^* et G' sont* (≤ 6)*-hypomorphes.*

Des deux Théorèmes 1 et 15 découle directement le corollaire suivant.

Corollaire 16 *[12] Les graphes finis sont* (≤ 12)*-demi reconstructibles.*

Dans la suite nous utilisons la notation suivante.

Notation 17 *Soient $G = (S, A)$ un graphe et M un module propre de G. On appelle contracté de G en M, le graphe $G_M = ((S - M) \cup \{M\}, A_M)$ où, A_M est défini comme suit:*
$(x, y) \in A_M$ si $[((x, y) \in A \cap [(S - M) \times (S - M)])$ ou $(x = M,\ y \notin M$ et $\exists z \in M/(z, y) \in A)$ ou $(x \notin M,\ y = M$ et $\exists z \in M/(x, z) \in A)]$. Ainsi, le graphe G_M est le graphe obtenu à partir de G en considérant M comme un sommet.

3 Caractérisation des graphes (≤ 12)-demi-reconstructibles.

Nous caractérisons dans ce paragraphe les graphes infinis non (≤ 12)-demi-reconstructibles.

Théorème 18 *Un graphe infini G est non* (≤ 12)*-demi-reconstructible si et seulement si l'une des situations suivantes est satisfaite.*

1. *G admet au moins un module infini qui est une chaîne.*
2. *G admet au moins deux modules dont chacun est une consécutivité infinie à une seule extrémité.*
3. *G admet un seul module M qui est une consécutivité infinie à une seule extrémité et il n'existe pas d'isomorphisme g de G_M sur $(G_M)^*$ tel que $g(M) = M$.*

La preuve de ce théorème utilise en outre la notation et les trois lemmes qui suivent.

Notation 19 *Soit G un graphe infini. On dit que le graphe G vérifie la condition C_{infini} si G vérifie l'une des situations 1, 2 ou 3 du Théorème 18.*

Lemme 20 *Soient G un graphe infini et G' un graphe (≤ 6)-hypomorphe à G. Si G ne vérifie pas la condition C_{infini}, alors G et G' sont hémimorphes.*

Preuve. Supposons que G ne vérifie pas la condition C_{infini}. Si $D_{G,G'}$ admet une seule classe. Dans ce cas, comme G' est (≤ 6)-hypomorphe à G, alors d'après le Lemme 9, G est une consécutivité. Donc, d'après le Lemme 8, $G' = G^*$ et par suite, G et G' sont hémimorphes. Supposons maintenant que $D_{G,G'}$ admet au moins deux classes. D'après le Lemme 8, toute classe C de $D_{G,G'}$ est un module de G et G' telle que $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 6)-hypomorphes. Si toutes les classes de $D_{G,G'}$ sont finies, alors d'après le Théorème 1, pour toute telle classe C, $G(C) \simeq G'(C)$ et par suite, d'après le Lemme 8, $G \simeq G'$. Supposons alors que $D_{G,G'}$ admet au moins une classe infinie. Si toute classe infinie C de $D_{G,G'}$ est autoduale. Dans ce cas, comme G n'admet aucun module de type chaîne infinie, alors d'après le Lemme 9, $G^*(C) \simeq G'(C)$ et par suite, $G(C) \simeq G'(C)$ et il en découle que G et G' sont isomorphes. Supposons que $D_{G,G'}$ admet une classe infinie non autoduale C_0. Dans ce cas, d'après le Lemme 10, C_0 est une consécutivité infinie à une seule extrémité. Donc, comme G ne vérifie pas la condition C_{infini}, alors, C_0 est unique. Ainsi, pour toute autre classe C de $D_{G,G'}$, on a $G(C) \simeq G'(C)$ et par suite, il existe un isomorphisme f de G'_{C_0} sur G_{C_0} tel que $f(C_0) = C_0$. Par ailleurs, d'après l'hypothèse il existe un isomorphisme g de G_{C_0} sur $(G_{C_0})^*$ tel que $g(C_0) = C_0$. On obtient donc un isomorphisme h de G'_{C_0} sur $(G_{C_0})^*$ tel que $h(C_0) = C_0$. Ainsi, comme $G'(C_0) \simeq G^*(C_0)$, alors $G' \simeq G^*$. □

Continuons par la remarque suivante dont la vérification est immédiate.

Remarque 21

1. *Tous deux ordres totaux définis sur le même ensemble de sommets sont finiment isomorphes.*

2. *Toute consécutivité infinie est finiment autoduale.*

De l'étude de Y. Boudabbous et C. Delhommé [4] découle en particulier le lemme suivant.

Lemme 22 *[4] Soit G un graphe.*

1. *Les modules chaînes maximaux (resp. consécutivités infinies à une seule extrémité) de G sont deux à deux disjoints.*

2. *Considérons une classe C de modules chaînes maximaux (resp. consécu tivités infinies à une seule extrémité) de G et un graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant, pour chaque $M \in C$, le sous-graphe $G(M)$ par une chaîne (resp. une consécutivité infinie à une seule extrémité) définie sur M.*
Alors G et G' ont les mêmes modules chaînes maximaux (resp. consécu tivités infinies à une seule extrémité).

Lemme 23 *Soit G un graphe. Si G vérifie la condition C_{infini}, alors G est non (≤ 12)-demi-reconstructible.*

Preuve.

- *Si G admet au moins un module de type chaîne infinie.*

Soit M un module chaîne infinie de G maximal pour l'inclusion. Considérons deux parties disjointes X_1 et X_2 de M qui sont équipotentes à $\mathbb{N}$ telles que $X_1 \cup X_2$ est une partie stricte de M. Soient C_1 et C_2 les chaînes définies sur M telles que $C_1(M - (X_1 \cup X_2)) = C_2(M - (X_1 \cup X_2)) = G(M - (X_1 \cup X_2))$, $C_1(X_1) \simeq \omega$, $C_2(X_1) \simeq \omega^*$, $C_1(X_2) \simeq \omega^*$, $C_2(X_2) \simeq \omega$ et $X_1 \longrightarrow M - (X_1 \cup X_2) \longrightarrow X_2$. Il est clair que C_1 et C_2 ne sont pas hémimorphes et que toutes les deux sont finiment hémimorphes à $G(M)$.

Cas 1. S'il existe un module M_1 équipotent à M tel que $G(M_1)$ est non hémimorphe à $G(M)$.
D'après le Lemme 22, tous les modules chaînes infinies maximaux de G sont deux à deux disjoints. Considérons alors, le graphe G' obtenu à partir de G en changeant le type d'isomorphie des modules chaînes infinies maximaux de G et qui sont équipotents à M par $G(M)$. D'après le Lemme 22, les graphes G et G' ont les mêmes modules chaînes infinies maximaux. En plus, deux chaînes définies sur un même ensemble de sommets sont finiment isomorphes, d' après la Remarque 21. Ainsi, les graphes G et G' sont ($\leq$ 12)-hémimorphes. D'autre part, puisque $G(M)$ et $G(M_1)$ ne sont pas hémimorphes, alors G et G' ne sont pas hémimorphes.

Cas 2. Si pour tout module M_1 équipotent à M, $G(M_1)$ est hémimorphe à $G(M)$.
Comme C_1 et C_2 ne sont pas hémimorphes, alors il existe $i \in \{1,2\}$ tel que C_i est non hémimorphe à $G(M)$. En utilisant le Lemme 22 et la Remarque 21, on peut voir que le graphe G' obtenu à partir de G

en remplaçant $G(M)$ par C_i est (≤ 12)-hémimorphe à G mais ne lui est pas hémimorphe.

- *Si G admet au moins deux modules dont chacun est une consécutivité infinie à une seule extrémité.*

Cas 1. S'il existe deux modules M_1 et M_2 qui sont de type consécutivité infinie à une seule extrémité et $G(M_2) \simeq G^*(M_1)$.
D'après le Lemme 22, tous les modules de G qui sont des consécutivités infinies à une seule extrémité sont deux à deux disjoints. Considérons alors le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant, pour tout module J de G distinct de M_1 tel que $G(J) \simeq G^*(M_1)$, le sous-graphe $G(J)$ par $G^*(J)$. D'après la Remarque 21, les modules qui sont des consécutivités infinies à une seule extrémité sont finiment autoduaux. Ainsi, le graphes G' est (≤ 12)-hémimorphe à G. Par ailleurs, d'après le Lemme 22, les graphes G et G' ont les mêmes modules qui sont des consécutivités infinies à une seule extrémité. D'autre part, G admet un module isomorphe à $G(M_1)$ et au moins un module isomorphe à $G^*(M_1)$ alors que G' n'admet aucun module isomorphe à $G^*(M_1)$. Par conséquent, G et G' ne sont pas hémimorphes.

Cas 2. S'il existe deux modules M_1 et M_2 qui sont de type consécutivité infinie à une seule extrémité et $G(M_2) \simeq G(M_1)$ et pour tous modules M, M' de G qui sont de type consécutivité infinie à une seule extrémité $G(M') \not\simeq G^*(M)$.
En utilisant le Lemme 22 et la Remarque 21, on vérifie facilement que le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant le sous-graphe $G(M_1)$ par $G^*(M_1)$ est (≤ 12)-hémimorphe à G mais ne lui est pas hémimorphe.

Cas 3. Pour tous modules M, M' de G qui sont de type consécutivité infinie à une seule extrémité $G(M)$ et $G(M')$ ne sont pas hémimorphes. Dans ce cas, G admet exactement deux modules M_1 et M_2 qui sont de types consécutivité infinie à une seule extrémité. Ainsi, le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant $G(M_1)$ par $G^*(M_1)$ est (≤ 12)-hémimorphe à G mais ne lui est pas hémimorphe.

- *G admet un seul module M qui est une consécutivité infinie à une seule extrémité et il n'existe pas d'isomorphisme g de G_M sur $(G_M)^*$ tel que $g(M) = M$.*

Dans ce cas, considérons le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant le sous-graphe $G(M)$ par $G^*(M)$. D'après la Remarque 21, le module M est finiment autodual. Ainsi, le graphe G' est (≤ 12)-hémimorphe à G. Par ailleurs, d'après le Lemme 22, M est le seul module de G et de G' de type consécutivité infinie à une seule extrémité. Comme, en plus, $G'(M) \not\simeq G(M)$, alors G et G' ne sont pas isomorphes. D'autre part, s'il existe un isomorphisme f de G' sur G^*, alors $f(M) = M$ et par suite f induit un isomorphisme g de G_M sur $(G_M)^*$ tel que $g(M) = M$; ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, G et G' ne sont pas hémimorphes.

□

Lemme 24 *Si $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$ sont deux graphes infinis (≤ 12)-hémimorphes, alors G et G' ou G^* et G' sont (≤ 6)-hypomorphes.*

Preuve. Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$ deux graphes infinis (≤ 12)-hémimorphes. Supposons par l'absurde que ni G et G', ni G^* et G' sont (≤ 6)-hypomorphes. On peut trouver donc deux parties X, Y de S telles que $1 \leq\mid X \mid\leq 6$, $1 \leq\mid Y \mid\leq 6$, $G'(X) \not\simeq G(X)$ et $G'(Y) \not\simeq G^*(Y)$. Soit Z une partie de S contenant X et Y telle que $\mid Z \mid= 13$. Par hypothèse, les graphes $G'(Z)$ et $G(Z)$ sont (≤ 12)-hémimorphes, alors que ni $G'(Z)$ et $G(Z)$ ni $G'(Z)$ et $G^*(Z)$ ne sont (≤ 6)-hypomorphes; ce qui contredit le Théorème 15. □

Preuve du Théorème 18.

La condition suffisante découle directement du Lemme 23. Pour la condition nécessaire, raisonnons par l'absurde et considérons un graphe infini G non (≤ 12)-demi-reconstructible ne vérifiant pas la C_{infini}. Soit G' un graphe (≤ 12)-hémimorphe à G qui ne lui est pas hémimorphe. D'après le Lemme 24, G et G' ou G^* et G' sont (≤ 6)-hypomorphes. Comme le graphe G ne vérifie pas la condition C_{infini}, alors il en est de même pour G^*. Ainsi, d'après le Lemme 20, G et G' sont hémimorphes; ce qui est absurde.

Cette remarque est une conséquence immédiate du Théorème 18 et de la structure des préchaînes.

Remarque 25 *Soit G un graphe (≤ 12)-demi-reconstructible. Comme les modules propres d'une préchaîne sont des chaînes, alors les modules propres des modules préchaînes de G sont tous finis, puisqu'ils sont des modules de G lui même.*

4 Principe de déformation

Dans cette section nous établissons la proposition suivante qui prouve la condition suffisante de tous les théorèmes qui suivent.

Proposition 26 *Dans chacune des situations suivantes, un graphe (≤ 12)-demi-reconstructible G est non ($\leq d$)-demi-reconstructible.*

- $(d, C_{n.a}(G)) \in \{(11,6),(10,5),(9,4)\}$ *et G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales qui sont des préchaînes tournois.*

- $(d, C_{n.a}(G)) \in \{(10,5),(9,4)\}$, *parmi les composantes connexes orientées non autoduales de G une seule, notée D, est une préchaîne tournoi et il n'existe pas d' isomorphisme g de G_D sur $(G_D)^*$ tel que $g(D) = D$.*

- $(d, C_{n.a}(G)) \in \{(9,5),(8,4)\}$ *et G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales qui sont des préchaînes.*

- $d = 8$, $C_{n.a}(G) = 4$, *parmi les composantes connexes orientées non autoduales de G une seule, notée D, est une préchaîne et il n'existe pas d' isomorphisme g de G_D sur $(G_D)^*$ tel que $g(D) = D$.*

- $d = 8$, $C_{n.a}(G) = 3$ *et G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales qui sont des préchaînes tournois disjointes de tout drapeau.*

- $d = 8$, $C_{n.a}(G) = 3$, *parmi les composantes connexes orientées non autoduales de G une seule, notée D, est une préchaîne tournoi disjointe de tout drapeau et il n'existe pas d' isomorphisme g de G_D sur $(G_D)^*$ tel que $g(D) = D$.*

- $d = 7$, $C_{n.a}(G) = 3$ *et G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales dont chacune est un module de type préchaîne tournoi ou une préchaîne non tournoi disjointe de tout drapeau.*

- $d = 7$, $C_{n.a}(G) = 3$, *parmi les composantes connexes orientées non autoduales de G une seule, notée D, est un module de type préchaîne tournoi ou une préchaîne non tournoi disjointe de tout drapeau et il n'existe pas d' isomorphisme g de G_D sur $(G_D)^*$ tel que $g(D) = D$.*

- $d = 7$, $C_{n.a}(G) = 4$ *et G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales.*

Le lemme suivant est utile pour la preuve de cette proposition.

Lemme 27 *Soit D une composante connexe orientée d'un graphe G. Alors:*
i) Si D n'est pas un module de G, alors il existe $a, b \in D$ avec $a \neq b$, $z \in S - D$ tels que $G(\{a, b, z\})$ est un drapeau.
ii) Si D est disjointe de tout drapeau, alors toute composante connexe orientée D' de G distincte de D est un module de $G(D \cup D')$.

Preuve.

i) Supposons que D n'est pas un module de G. Dans ce cas il existe deux éléments distincts x, y de D et $z \in S - D$ tels que l'arête $\{x, z\}$ est vide et l'arête $\{y, z\}$ est pleine. Considérons un chemin orienté $x = x_0, ..., x_k = y$ d'éléments de D tel que pour tout $i < k$ la paire $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête orientée. Comme l'arête $\{x, z\}$ est vide et l'arête $\{y, z\}$ est pleine, alors il existe $i \in \{0, ..., k-1\}$ tel que l'arête $\{x_i, z\}$ est vide et l'arête $\{x_{i+1}, z\}$ est pleine. Ainsi, $G(\{x_i, x_{i+1}, z\})$ est un drapeau d'arête orientée $\{x_i, x_{i+1}\}$.

ii) Supposons que D est disjointe de tout drapeau et considérons une composante connexe orientée D' de G distincte de D. Raisonnons par l'absurde et supposons que D' n'est pas un module de $G(D \cup D')$. Dans ce cas, le i) appliqué au sous-graphe $G(D \cup D')$ implique qu'il existe $a, b \in D'$ avec $a \neq b$, $z \in D$ tels que $G(\{a, b, z\})$ est un drapeau; ce qui contredit le fait que D est disjointe de tout drapeau. □

Du Lemme 27, nous déduisons immédiatement la remarque suivante.

Remarque 28 *Soit D une composante connexe orientée d'un graphe G.*

- *Si D est disjointe de tout drapeau, alors D est un module de G.*
- *Si $C_{n.a}(G) \geq 4$, alors D est un module de G.*

Preuve de la Proposition 26

Soit ξ l'un des types des composantes connexes orientées citées dans le lemme. Pour chaque type d'isomorphie t d'un graphe de type ξ, et pour chaque graphe G, on note $\xi_G(t)$ l'ensemble des composantes connexes orientées de G dont le type d'isomorphie est t. Dans chacun des cas suivants, on va construire un graphe non hémimorphe à G.

Cas 1. Si G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales de type ξ.

Cas 1.1. S'il existe deux composantes connexes orientées non autoduales D_1 et D_2 de type ξ telles que $G(D_2) \simeq G^*(D_1)$.
Considérons le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant pour tout

$X \in \xi_G(G^*(D_1))$ le sous-graphe $G(X)$ par $G^*(X)$. Comme $\xi_G(G(D_1)) \neq \emptyset$, $\xi_G(G^*(D_1)) \neq \emptyset$, $\xi_{G'}(G(D_1)) \neq \emptyset$ et $\xi_{G'}(G^*(D_1)) = \emptyset$, alors les graphes G et G' ne sont pas hémimorphes.

Cas 1.2. S'il existe deux composantes connexes orientées non autoduales D_1 et D_2 de type ξ telles que $G(D_2) \simeq G(D_1)$ et pour toutes composantes connexes orientées non autoduales D et D' de G de type ξ, $G(D) \not\simeq G^*(D')$. Considérons le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant $G(D_1)$ par $G^*(D_1)$. Comme $\xi_G(G(D_1)) \neq \emptyset$, $\xi_G(G^*(D_1)) = \emptyset$, $\xi_{G'}(G(D_1)) \neq \emptyset$ et $\xi_{G'}(G^*(D_1)) \neq \emptyset$, alors les graphes G et G' ne sont pas hémimorphes.

Cas 1.3 Si pour toutes composantes connexes orientées non autoduales D et D' de G de type ξ, $G(D)$ et $G(D')$ ne sont pas hémimorphes.
Soient D_1 et D_2 deux composantes connexes orientées non autoduales de G de type ξ. Considérons le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant $G(D_1)$ par $G^*(D_1)$. Comme $\mid \xi_G(G(D_1)) \mid = 1$, $\mid \xi_G(G^*(D_1)) \mid = 0$, $\mid \xi_G(G(D_2)) \mid = 1$, $\mid \xi_G(G^*(D_2)) \mid = 0$, $\mid \xi_{G'}(G(D_1)) \mid = 0$, $\mid \xi_{G'}(G^*(D_1)) \mid = 1$, $\mid \xi_{G'}(G(D_2)) \mid = 1$ et $\mid \xi_{G'}(G^*(D_2)) \mid = 0$, alors les graphes G et G' ne sont pas hémimorphes.

Cas 2. Si parmi les composantes connexes orientées de G une seule, notée D, est de type ξ et il n'existe pas d' isomorphisme g de G_D sur (G^*_D) tel que $g(D) = D$.
Dans ce cas, considérons le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant $G(D)$ par $G^*(D)$. On a donc $\xi_G(G(D)) = \{D\}$, $\xi_G(G^*(D)) = \emptyset$, $\xi_{G'}(G(D)) = \emptyset$ et $\xi_{G'}(G^*(D)) = \{D\}$. Ainsi, G et G' ne sont pas isomorphe. Par ailleurs, s'il existe un isomorphisme f de G' sur G^*, alors nécessairement $f(D) = D$ (car $\xi_{G^*}(G^*(D)) = \{D\}$ et $\xi_{G'}(G^*(D)) = \{D\}$). Ainsi, l'application g définie sur $(S - D) \cup \{D\}$, par $g(D) = D$ et pour tout $x \in S - D, g(x) = f(x)$, est un isomorphisme de G_D sur $(G_D)^*$ tel que $g(D) = D$; ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, les graphes G et G' ne sont pas hémimorphes.

Montrons maintenant que les graphes G et G' sont $(\leq d)$ hémimorphes. Soit X une partie de S telle que $\mid X \mid \leq d$. Comme G et G' sont (≤ 2)-hémimorphes, alors en utilisant la Remarque 28, on vérifie facilement que chaque composante connexe orientée de G inversée dans G' est un module de G et G'.

Les trois faits qui suivent achèvent la preuve.

Fait 29 *S'il existe deux composantes connexes orientées $D' \neq D$ de G telles que min $(\mid X \cap D' \mid, \mid X \cap D \mid) \geq C_{n.a}(G)$, alors pour toute com-*

posante connexe orientée D_1 de G tel que $G^*(D_1) = G'(D_1)$, $G(X \cap D_1)$ est autodual.
En effet,
Si $| X \cap D_1 |< C_{n.a}(G)$, alors on a le résultat. Sinon, d'après les valeurs de d et $C_{n.a}(G)$ on discute seulement les situations suivantes.

- *$(d, C_{n.a}(G)) = (10,5)$ (resp. $(8,4)$) et D_1 est une préchaîne tournoi (resp. une préchaîne.)*
  Rappelons d'après la Proposition 6, que toute préchaîne tournoi (resp. préchaîne) est (≤ 5)-autoduale (resp. (≤ 4)-autoduale).
  Si $| X \cap D_1 |= C_{n.a}(G)$, alors $G(X \cap D_1)$ est autodual. Si $| X \cap D_1 |> C_{n.a}(G)$, alors $| X - D_1 |< C_{n.a}(G)$; ce qui est absurde.

- *$(d, C_{n.a}(G)) = (9,4)$ et D_1 est une préchaîne tournoi.*
  Si $| X \cap D_1 | \in \{4,5\}$, alors $G(X \cap D_1)$ est autodual. Sinon, $| X - D_1 |< C_{n.a}(G)$; ce qui est absurde.

- *$(d, C_{n.a}(G)) = (8,3)$ et D_1 est une préchaîne tournoi disjointe de tout drapeau.*
  Si $| X \cap D_1 | \in \{3,4,5\}$, alors $G(X \cap D_1)$ est autodual. Sinon, $| X - D_1 |< C_{n.a}(G)$; ce qui est absurde.

- *$(d, C_{n.a}(G)) = (7,3)$ et D_1 est un module de type préchaîne tournoi ou préchaîne non tournoi disjointe de tout drapeau.*
  Si $| X \cap D_1 | \in \{3,4\}$, alors $G(X \cap D_1)$ est autodual. Sinon, $| X - D_1 |< C_{n.a}(G)$; ce qui est absurde.

Fait 30 *Si pour toute composante connexe orientée D de G, $| X \cap D |< C_{n.a}(G)$, alors G et G' sont $(\leq d)$ hémimorphes.*
En effet,
Comme pour toute composante connexe orientée D, on a $| X \cap D |< C_{n.a}(G)$, alors $G(X \cap D) \simeq G^*(X \cap D)$. Soit D_1 une composante connexe orientée de G. Si D_1 est inversée, alors $G'(X \cap D_1) = G^*(X \cap D_1)$ et par suite, $G'(X \cap D_1) \simeq G(X \cap D_1)$. Sinon, on a $G'(X \cap D_1) = G(X \cap D_1)$. Donc, pour toute composante connexe orientée D, on a $G'(X \cap D) \simeq G(X \cap D)$. Comme en plus, les composantes connexes orientées inversées de G sont des modules de G et G', alors $G'(X)$ et $G(X)$ sont isomorphes.

Fait 31 *S'il existe une composante connexe orientée D de G telle que $| X \cap D | \geq C_{n.a}(G)$, alors G et G' sont $(\leq d)$ hémimorphes.*
En effet,

- *Si pour toute composante connexe orientée D' distincte de D, on a $| X \cap D' |< C_{n.a}(G)$, alors $G(X \cap D') \simeq G'(X \cap D') \simeq G^*(X \cap D')$. En plus, les composantes connexes orientées inversées de G sont des* *modules de G et G'. Ainsi, si $G'(D) = G(D)$, alors $G(X) \simeq G'(X)$. Supposons maintenant que $G'(D) = G^*(D)$. Si $G(X \cap D) \simeq G'(X \cap D)$, on conclut comme dans le Fait 30. Sinon, il est clair que $G^*(X \cap D) = G'(X \cap D)$. Donc, si $C_{n.a}(G) \geq 4$, comme toute les composantes connexes orientées de G sont des modules, alors on déduit facilement que $G^*(X) \simeq G'(X)$. Si $C_{n.a}(G) = 3$, suivant les valeur de d, nous distinguons ces deux situations.*

1. *Si $d = 7$ et D est un module préchaîne tournoi. Dans ce cas, comme d'après la Proposition 6, les préchaînes tournois sont (≤ 5)-autoduales et $G^*(X \cap D) \not\simeq G(X \cap D)$, alors $\mid X \cap D \mid \geq 6$ et par suite, on vérifie facilement que $G^*(X) \simeq G'(X)$.*
2. *Si $d = 7$ et D est une préchaîne non tournoi (resp. $d = 8$ et D est une préchaîne tournoi) disjointe de tout drapeau. Dans ce cas, comme d'après la Proposition 6, les préchaînes (resp. préchaînes tournois) sont (≤ 4)-autoduales (resp. (≤ 5)-autoduales), alors $\mid X \cap D \mid \geq 5$ (resp. $\mid X \cap D \mid \geq 6$). Si pour toute composante connexe orientée D' distincte de D, $\mid X \cap D' \mid = 1$, alors $G^*(X) \simeq G'(X)$. Sinon, on a $\mid X \mid = 7$ et $\mid X \cap D \mid = 5$ (resp. $\mid X \mid = 8$ et $\mid X \cap D \mid = 6$) et il existe une composante connexe orientée $D' \neq D$ de G telle que $\mid X \cap D' \mid = 2$. D'après le Lemme 27, la paire $\{D, D'\}$ est une partition modulaire de $G(D \cup D')$ et par suite de $G'(D \cup D')$. Ainsi, $\{X \cap D, X \cap D'\}$ est une partition modulaire de $G(X)$ et $G'(X)$. Par conséquent, comme $G^*(X \cap D) = G'(X \cap D)$ et $G^*(X \cap D') \simeq G'(X \cap D')$, alors $G^*(X) \simeq G'(X)$.*

- *S'il existe une composante connexe orientée D' distincte de D telle que $\mid X \cap D' \mid \geq C_{n.a}(G)$. Dans ce cas, d'après les valeurs considérées du couple $(d, C_{n.a}(G))$, on voit que pour toute composante connexe orientée D'' de G distincte de D et D', $\mid X \cap D'' \mid < C_{n.a}(G)$ et par suite, $G(X \cap D'') \simeq G'(X \cap D'') \simeq G^*(X \cap D'')$. Ainsi, comme les composantes connexes orientées inversées de G sont des modules de G et G', alors en utilisant le Fait 29, on vérifie facilement que $G(X) \simeq G'(X)$.*

5 Caractérisation des graphes (≤ 11)-demi-reconstructibles.

Comme tout graphe non (≤ 12)-demi-reconstructible est non (≤ 11)-demi-reconstructible, nous caractérisons dans ce paragraphe les graphes qui sont (≤ 12)-demi-reconstructibles et non (≤ 11)-demi-reconstructibles.

Théorème 32
Un graphe (≤ 12)*-demi-reconstructible* G *est non* (≤ 11)*-demi-reconstructible si et seulement si* $C_{n.a}(G) = 6$ *et* G *admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales qui sont des préchaînes tournois.*

Notation 33 *Soient* $G = (S, A)$ *un graphe et* $\{a, b, c, d\}$ *une partie de* S *telle que:* $a \neq b$ *et* $c \neq d$. *On note* $(a, b) \sim (c, d)$, *si la bijection* f *de* $\{a, b\}$ *sur* $\{c, d\}$ *définie par:* $f(a) = c$ *et* $f(b) = d$ *est un isomorphisme de* $G(\{a, b\})$ *sur* $G(\{c, d\})$.

À l'aide du Lemme 5 et de la Proposition 13, on obtient:

Proposition 34 *Soient un entier* $d \geq 5$, $G = (S, A)$ *et* $G' = (S, A')$ *deux graphes infinis* $(\leq d)$*-hémimorphes et* C *une classe de l'équivalence* $D_{G,G'}$.

1. *Si* C *est différente de sa composante connexe orientée, alors* C *est un module de* G *et* G' *et* $G(C)$ *et* $G'(C)$ *sont* $(\leq d-1)$*-hypomorphes.*

2. *Si* I_0 *est une partie finie de* C *telle que* $\mid I_0 \mid = C_{n.a}(G)$ *et* $G(I_0)$ *est non autodual, alors* $G'(I_0) \simeq G^*(I_0)$.

3. *Si* I_0 *est une partie finie de* S *telle que* $\mid I_0 \mid = C_{n.a}(G)$, $G(I_0)$ *est non autodual et* $G(I_0) \simeq G'(I_0)$, *alors:*
(i) C *est un module de* G *et* G'.
(ii) Si en plus, $G(I_0)$ *est un drapeau et* $C \cap I_0 \neq \emptyset$, *alors* $G(C)$ *et* $G'(C)$ *sont* $(\leq d-2)$*-hypomorphes.*
(iii) $G(C)$ *et* $G'(C)$ *sont* $(\leq max\ (C_{n.a}(G)\text{-}1,\ d\ \text{-}\ C_{n.a}(G)))$*-hypomorphes.*

Preuve.
1) Supposons que C est différente de sa composante connexe orientée.

Étape 1. Montrons que C *est un module de* G *et* G'.

Pour ce faire, considérons $x, y \in C$ tels que $x \neq y$ et $z \in S - C$ et montrons que $(z, x) \sim (z, y)$. Comme C est différente de sa composante connexe orientée, alors il existe $a \in C$ et $b \in S - C$ tels que la paire $\{a, b\}$ est une arête orientée. À l'aide du Lemme 5, on peut trouver une partie finie X de C telle que $\{x, y, a\} \subseteq X$ et X est une classe de $D_{G(X),G'(X)}$. (Si C est finie, on peut prendre $X = C$). Soit $Y = X \cup \{z, b\}$. Il est clair que X est une classe de $D_{G(Y),G'(Y)}$, différente de sa composante connexe orientée par rapport au sous-graphe $G(Y)$. Ainsi, d'après la Proposition 13, X est un module de $G(Y)$ et $G'(Y)$ et en particulier $(z, x) \sim (z, y)$.

Étape 2. Montrons $G(C)$ et $G'(C)$ sont $(\leq d-1)$-hypomorphes.

Soient $a \in S - C$ tel que $a \longrightarrow C$ ou $C \longrightarrow a$ et X une partie de C à au plus $d-1$ éléments. Montrons que $G(X) \simeq G'(X)$. À l'aide du Lemme 5, considérons une partie finie Z de C telle que $X \subseteq Z$ et Z est une classe de $D_{G(Z),G'(Z)}$. (Si C est finie, on peut prendre $Z = C$). Soit $Y = Z \cup \{a\}$. Il est clair que Z est une classe de $D_{G(Y),G'(Y)}$ différente de sa composante connexe orientée par rapport au sous-graphe $G(Y)$. Ainsi, d'après la Proposition 13, $G(Z)$ et $G'(Z)$ sont $(\leq d-1)$-hypomorphes et par suite, $G(X) \simeq G'(X)$.

2) Soit I_0 une partie finie de C telle que $\mid I_0 \mid= C_{n.a}(G)$ et $G(I_0)$ est non autodual.

Si C est une classe finie, le résultat découle de la Proposition 13 appliquée aux sous-graphes $G(C)$ et $G'(C)$. Supposons donc que la classe C est infinie. D'après le Lemme 5, il existe une partie finie Y de C contenant I_0 telle que Y est une classe de $D_{G(Y),G'(Y)}$. En appliquant la Proposition 13 aux sous-graphes $G(Y)$ et $G'(Y)$, on obtient le résultat.

3) D'après (1), on peut supposer que C est égale à sa composante connexe orientée.
(i) Supposons que $G(I_0) \simeq G'(I_0)$ et montrons que C est un module de G et G'.
Pour ce faire, considérons $x, y \in C$ tels que $x \neq y$ et $z \in S - C$ et montrons que $(z,x) \sim (z,y)$. À l'aide du Lemme 5, on peut trouver une partie finie X de C contenant $\{x,y\} \cup (I_0 \cap C)$ telle que X est une classe de $D_{G(X),G'(X)}$. Soit $Y = X \cup \{z\} \cup I_0$. Il est clair que X est une classe de $D_{G(Y),G'(Y)}$. Comme en plus, $G(I_0) \simeq G'(I_0)$, alors d'après la Proposition 13 appliquée aux sous-graphes $G(Y)$ et $G'(Y)$, X est un module de $G(Y)$ et $G'(Y)$ et en particulier, $(z,x) \sim (z,y)$.

(ii) Supposons que $G(I_0) \simeq G'(I_0)$, $G(I_0)$ est un drapeau et $C \cap I_0 \neq \emptyset$ et montrons que $G(C)$ et $G'(C)$ sont $(\leq d-2)$-hypomorphes.

Comme d'après (i) C est un module de G et G', alors $C \cap I_0 = \{a\}$ où a est le sommet du drapeau adjacent aux deux arêtes neutres. Soit X une partie de C à au plus $d-2$ éléments. À l'aide du Lemme 5, considérons une partie finie Z de C telle que $X \cup \{a\} \subseteq Z$ telle que Z est une classe de $D_{G(Z),G'(Z)}$. Soit $Y = Z \cup (I_0 - \{a\})$. Il est clair que Z est une classe de $D_{G(Y),G'(Y)}$. Comme en plus, $G(I_0) \simeq G'(I_0)$, $G(I_0)$ est un drapeau et $Z \cap I_0 \neq \emptyset$, alors d'après la Proposition 13 appliquée aux sous-graphes

$G(Y)$ et $G'(Y)$, $G(Z)$ et $G'(Z)$ sont $(\leq d-2)$-hypomorphes et par suite, $G(X) \simeq G'(X)$.

(iii) Supposons que $G(I_0) \simeq G'(I_0)$ et montrons que $G(C)$ et $G'(C)$ sont $(\leq max(\mathcal{C}_{n.a}(G)-1, d-\mathcal{C}_{n.a}(G)))$-hypomorphes.

Considérons une partie X de C à au plus $max(\mathcal{C}_{n.a}(G)-1, d-\mathcal{C}_{n.a}(G))$ éléments et montrons que $G(X) \simeq G'(X)$. À l'aide du Lemme 5, on peut trouver une partie finie Z de C contenant $X \cup (C \cap I_0)$ telle que Z est une classe de $D_{G(Z),G'(Z)}$. Soit $Y = Z \cup I_0$. Il est clair que Z est une classe de $D_{G(Y),G'(Y)}$. Comme en plus, $G(I_0) \simeq G'(I_0)$, alors d'après la Proposition 13, appliquée aux sous-graphes $G(Y)$ et $G'(Y)$, on voit que $G(X) \simeq G'(X)$. □

Lemme 35 *Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$ deux graphes infinis (≤ 5)-hémimorphes. Si chacune des équivalences $D_{G,G'}$ et $D_{G^*,G'}$ admet une seule classe, alors G est une chaîne.*

Preuve. Comme $D_{G,G'}$ et $D_{G^*,G'}$ admet chacune une classe, alors d'après la Proposition 34, G n'admet aucun sous-graphe non autodual fini et par suite, G, G' et G^* sont deux à deux (≤ 5)-hypomorphes. Par ailleurs, le Lemme 8 implique que G n'abrite aucune 3-consécutivité. Ainsi, d'après le Lemme 11, G est un tournoi. Comme, en plus d'après le Lemme 8, G n'abrite pas de 3-cycle, alors G est une chaîne.

□

La preuve du Théorème 32 utilise en outre les quatre lemmes qui suivent où $G = (S, A)$ est un graphe (≤ 12)-demi-reconstructible.

Lemme 36 *Soient G' un graphe (≤ 7)-hémimorphe à G et M un module de G et G'. Si $\mathcal{C}_{n.a}(G) \geq 4$, alors l'équivalence $D_{G(M),G'(M)}$ n'admet aucune classe infinie différente de sa composante connexe orientée.*

Preuve. Supposons par l'absurde, que l'équivalence $D_{G(M),G'(M)}$ admet une classe infinie C_0 différente de sa composante connexe orientée. D'après la Proposition 34, C_0 est un module de $G(M)$ et $G'(M)$ et $G(C_0)$ et $G'(C_0)$ sont (≤ 6)-hypomorphes. Supposons que $G(C_0)$ contient une arête neutre $\{a, b\}$. Comme C_0 est un module de $G(M)$, alors il existe $c \in M - C_0$, tel que $c \longrightarrow C_0$ ou $c \longleftarrow C_0$. Donc, il est clair que le sous-graphe $G(\{a, b, c\})$ est non autodual; ce qui contredit le fait que $\mathcal{C}_{n.a}(G) \geq 4$. D'où, $G(C_0)$ est un tournoi. Ainsi, d'après le Lemme 9, $G(C_0)$ est un ordre total ou un presque ordre total tournoi. D'où, C_0 admet un module chaîne infinie M_1.

Par ailleurs, comme C_0 est un module de $G(M)$ et M est un module de G et G', alors M_1 est un module de G; ce qui contredit le fait que G est (≤ 12)-demi-reconstructible. $\square$

Lemme 37 *Soit D une composante connexe orientée de G. Si G' est un graphe (≤ 7)-hémimorphe à G et si $C_{n.a}(G) \geq 4$, alors $G(D)$ et $G'(D)$ sont hémimorphes.*

Preuve. Si la composante connexe orientée D est finie, alors le Lemme 14 permet de conclure. Sinon, il est clair que D est une classe de D_{G,G^*}. Comme $C_{n.a}(G) \geq 4$, alors G et G^* sont (≤ 3)-hypomorphes et par suite d'après le Lemme 8, D est un module de G. Grâce à la (≤ 2)-hémimorphie, D est aussi une composante connexe orientée de G'. Ainsi, D est un module de G'. Puisque G n'admet aucun module de type chaîne infinie, alors d'après le Lemme 35, l'une au moins des deux équivalences: $D_{G(D),G'(D)}$ et $D_{G^*(D),G'(D)}$, admet au moins deux classes. Quitte à échanger $G(D)$ et $G^*(D)$, on peut supposer que $D_{G(D),G'(D)}$ admet au moins deux classes. Comme toute classe de $D_{G(D),G'(D)}$ est différente de sa composante connexe orientée, alors d'après le Lemme 36, toutes les classes de $D_{G(D),G'(D)}$ sont finies. De plus, la Proposition 34 implique que pour toute classe C de $D_{G(D),G'(D)}$, les sous-graphes $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 6)-hypomorphes. Par conséquent, d'après le Théorème 1, $G(C) \simeq G'(C)$ et il en découle d'après le Lemme 8 que $G(D) \simeq G'(D)$. $\square$

Lemme 38 *S'il existe un entier $d \geq 6$ tel que G est non $(\leq d)$-demi-reconstruct-ible, alors $C_{n.a}(G) \leq 6$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un entier $d \geq 6$ tel que G est non $(\leq d)$-demi-reconstructible. Notons d'abord, que puisque G est (≤ 12)-demi-reconstructible, alors $6 \leq d \leq 11$. Supposons maintenant que $C_{n.a}(G) \geq 7$ et considérons un graphe G' qui est $(\leq d)$-hémimorphe à G mais ne lui est pas hémimorphe. Comme G n'admet aucun sous-graphe non autodual de cardinal inférieur ou égal à 6, alors G' est (≤ 6)-hypomorphe à G. Ainsi, d'après le Lemme 20, G vérifie la condition C_{infini}; ce qui contredit le fait que G est un graphe (≤ 12)-demi-reconstructible. $\square$

Lemme 39 *Soient un entier $d \geq 7$ et G' un graphe $(\leq d)$-hémimorphe à G. Si $C_{n.a}(G) = 6$ et G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale qui est une préchaîne tournoi, alors G' et G sont hémimorphes.*

Preuve. Comme $C_{n.a}(G) = 6$, alors G, G' et G^* sont deux à deux (≤ 5)-hypomorphes. En plus, toute composante connexe orientée X de G

est un module de G et G' et d'après le Lemme 37, $G(X) \simeq G'(X)$ ou $G^*(X) \simeq G'(X)$. Ainsi, si toutes les composantes connexes orientées de G sont autoduales, alors $G \simeq G' \simeq G^*$. Supposons dans la suite que G admet une composante connexe orientée non autoduale D. Comme G est (≤ 12)-demi-reconstructible, G et G^* sont (≤ 5)-hypomorphes et D est une classe de l'équivalence D_{G,G^*}, alors d'après le Lemme 10, D est une consécutivité infinie à une seule extrémité ou une préchaîne tournoi. Si G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales. Dans ce cas, tenant compte de l'hypothèse du présent lemme et du fait que G est (≤ 12)-demi-reconstructible, on voit que G admet exactement deux composantes connexes orientées non autoduales: une, soit D_1, de type consécutivité infinie à une seule extrémité et une, soit D_2, de type préchaîne tournoi. De plus, d'après le Théorème 18, il existe un isomorphisme g de G_{D_1} sur $(G_{D_1})^*$ tel que $g(D_1) = D_1$. Donc, il est clair que $g(D_2) = D_2$; ce qui est absurde car D_2 est non autoduale. Ainsi, D est l'unique composante connexe orientée non autoduale de G. D'où, $G \simeq G'$ si $G(D) \simeq G'(D)$, et $G^* \simeq G'$ si $G^*(D) \simeq G'(D)$. $\square$

Preuve du Théorème 32.

La condition suffisante découle directement de la Proposition 26. Pour la condition nécessaire, soient G un graphe (≤ 12)-demi-reconstructible et non (≤ 11)-demi-reconstructible et G' un graphe (≤ 11)-hémimorphe à G qui ne lui est pas hémimorphe. D'après le Lemme 38 , $C_{n.a}(G) \leq 6$. Considérons alors un sous-graphe non autodual fini $G(I_0)$ tel que $\mid I_0 \mid = C_{n.a}(G)$. Quitte à échanger G et G^* on peut supposer que $G(I_0) \simeq G'(I_0)$. D'après les Propositions 13 et 34, l'équivalence $D_{G,G'}$ admet donc au moins deux classes.
Supposons par l'absurde que $C_{n.a}(G) \in \{3, 4, 5\}$. D'après les Propositions 13 et 34, toute classe C de $D_{G,G'}$ est un module de G et G' tel que $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 6)-hypomorphes et par suite, G et G' sont (≤ 6)-hypomorphes. Comme G' n'est pas hémimorphe à G, alors d'après le Théorème 1, G est un graphe infini. Ainsi, d'après le Lemme 20, G vérifie la condition C_{infini}; ce qui contredit le fait que G est un graphe (≤ 12)-demi-reconstructible. Ainsi, $C_{n.a}(G) = 6$ et donc on conclut par le Lemme 39.

6 Caractérisation des graphes (≤ 10)-demi-reconstructibles.

Comme tout graphe non (≤ 11)-demi-reconstructible est non (≤ 10)-demi-reconstructible, nous caractérisons dans ce paragraphe les graphes qui sont (≤ 11)-demi-reconstructibles et non (≤ 10)-demi-reconstructibles.

Théorème 40 *Un graphe (≤ 11)-demi-reconstructible G est non (≤ 10)-demi-reconstructible si et seulement si l'une des situations suivantes est satisfaite.*

1. $C_{n.a}(G) = 5$ *et G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales qui sont des préchaînes tournois.*

2. $C_{n.a}(G) = 5$, *parmi les composantes connexes orientées non autoduales de G une seule, notée D_1, est une préchaîne tournoi et il n'existe pas d' isomorphisme g de G_{D_1} sur $(G_{D_1})^*$ tel que $g(D_1) = D_1$.*

La preuve de ce théorème utilise en outre les trois lemmes suivants où $G = (S, A)$ est un graphe (≤ 11)-demi-reconstructible.

Lemme 41 *Soient un entier $d \geq 7$ et G' un graphe ($\leq d$)-hémimorphe à G. Si $C_{n.a}(G) = 3$ et $D_{G,G'}$ admet une classe C non autoduale différente de sa composante connexe orientée, alors C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité. En plus elle est unique et il existe un isomorphisme g de G_C sur $(G_C)^*$ tel que $g(C) = C$.*

Preuve. Soit C une classe non autoduale de $D_{G,G'}$ qui est différente de sa composante connexe orientée. D'après les Propositions 13 et 34, $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 6)-hypomorphes et par suite, d'après le Lemme 10, C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité. Comme C est différente de sa composante connexe orientée, alors d'après la Propositions 34, C est un module de G et G'. Ainsi, d'après le Théorème 18, C est unique et il existe un isomorphisme g de G_C sur $(G_C)^*$ tel que $g(C) = C$. □

Lemme 42 *Soient un entier $d \in \{7, 8\}$ et G' un graphe ($\leq d$)-hémimorphe à G et $G(I_0)$ un sous-graphe non autodual de G tel que $|I_0| = C_{n.a}(G) = 3$ et $G(I_0) \simeq G'(I_0)$ et C une classe non autoduale de $D_{G,G'}$ qui est une composante connexe orientée.*

i) Si $d = 7$ (resp. $d = 8$) et C contient un sommet d'un drapeau, alors C

est de type consécutivité infinie à une seule extrémité ou de type préchaîne tournoi (resp. C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité).
ii) Si $d = 7$ (resp. $d = 8$) et C est disjointe de tout drapeau, alors C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité ou de type préchaîne (resp. C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité ou de type préchaîne tournoi).

Preuve.

i) Si $d = 7$ (resp. $d = 8$) et C contient un sommet d'un drapeau. Notons I_1 l'ensemble de sommets d'un tel drapeau. Comme $G(I_0) \simeq G'(I_0)$, alors les Propositions 13 et 34 impliquent que toute classe X de $D_{G,G'}$ est un module de G et G' et $G(X)$ et $G'(X)$ sont (≤ 4)-hypomorphes (resp. (≤ 5)-hypomorphes). Ainsi, il est clair en utilisant le Lemme 10 que $I_1 \not\subseteq C$. Comme en plus $G(I_1)$ est indécomposable, alors pour toute classe X de $D_{G,G'}$, $\mid I_1 \cap X \mid \leq 1$ et par suite, $G(I_1) \simeq G'(I_1)$. Par conséquent, d'après les Propositions 13 et 34, on a $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 5)-hypomorphes (resp. $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 6)-hypomorphes). Ainsi, d'après le Lemme 10, C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité ou de type préchaîne tournoi (resp. C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité).

ii) Si $d = 7$ (resp. $d = 8$) et C est disjointe de tout drapeau. Comme $G(I_0) \simeq G'(I_0)$, alors d'après les Propositions 13 et 34, $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 4)-hypomorphes (resp. $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 5)-hypomorphes). Ainsi, d'après le Lemme 10, C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité ou de type préchaîne (resp. C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité ou de type préchaîne tournoi). □

Lemme 43 *Soient $d \in \{7, 8, 9, 10\}$, G' un graphe ($\leq d$)-hémimorphe à G et $G(I_0)$ un sous-graphe non autodual de G tel que $\mid I_0 \mid = C_{n.a}(G)$ et $G(I_0) \simeq G'(I_0)$. Dans chacune des situations suivantes, G' est hémimorphe à G.*

i) $(d, C_{n.a}(G)) = (7, 3)$ et G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale D qui est un module de type préchaîne tournoi ou préchaîne non tournoi disjointe de tout drapeau. En plus, lorsqu'une telle composante D existe, il existe un isomorphisme g de G_D sur $(G_D)^*$ tel que $g(D) = D$.
ii) $(d, C_{n.a}(G)) = (8, 3)$ et G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale D qui est une préchaîne tournoi disjointe de tout drapeau. En plus, lorsqu'une telle composante D existe, il existe un isomorphisme g de G_D sur $(G_D)^*$ tel que $g(D) = D$.
iii) $(d, C_{n.a}(G)) = (8, 4)$ et G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale D qui est une préchaîne. En plus, lorsqu'une telle

composante D existe, il existe un isomorphisme g de G_D sur $(G_D)^*$ tel que $g(D) = D$.
iv) $(d, \mathcal{C}_{n.a}(G)) \in \{(9,4),(10,5)\}$ et G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale D qui est une préchaîne tournoi. En plus, lorsqu'une telle composante D existe, il existe un isomorphisme g de G_D sur $(G_D)^*$ tel que $g(D) = D$.

Preuve. Dans chacune des situations i), ii), iii) et iv), comme $G(I_0) \simeq G'(I_0)$, alors d'après les Propositions 13 et 34 et le Théorème 18, $D_{G,G'}$ admet au moins deux classes et pour toute classe C de $D_{G,G'}$, C est un module de G (et G') n'admettant aucun module de type chaîne infinie et $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 4)-hypomorphes. Supposons d'abord que toutes les classes de $D_{G,G'}$ sont autoduales. D'après le Lemme 9, pour chaque classe C de $D_{G,G'}$, $G^*(C) \simeq G'(C)$ et donc $G(C) \simeq G'(C)$. Ainsi, d'après le Lemme 8, $G \simeq G'$. Dans toute la suite nous supposons donc que l'équivalence $D_{G,G'}$ admet (au moins) une classe non autoduale. La description d' une telle classe C est donnée par les Lemmes 41 et 42 pour $\mathcal{C}_{n.a}(G) = 3$. Si $(d, \mathcal{C}_{n.a}(G)) = (8,4)$, comme $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 4)-hypomorphes, alors d'après le Lemme 10, C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité ou de type préchaîne. Finalement pour $(d, \mathcal{C}_{n.a}(G)) \in \{(9,4),(10,5)\}$, les Propositions 13 et 34 impliquent que $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 5)-hypomorphes. D'où d'après Lemme 10, C est de type consécutivité infinie à une seule extrémité, ou de type préchaîne tournoi.

Les deux faits suivants achèvent la preuve.

Fait 44 *Dans chacune des situations i), ii), iii) et iv), l'équivalence $D_{G,G'}$ admet une unique classe non autoduale.*
En effet,

Supposons dans un premier temps qu'on est dans la situation i)(resp ii)) et qu'il existe une classe non autoduale C_1 de $D_{G,G'}$ qui est différente de sa composante connexe orientée (resp. qui est différente de sa composante connexe orientée ou qui est une composante connexe orientée contenant un sommet d'un drapeau). D'après le Lemme 41 (resp. les Lemmes 41 et 42 et le Théorème 18), C_1 est unique, de type consécutivité infinie à une seule extrémité et il existe un isomorphisme g_1 de G_{C_1} sur $(G_{C_1})^*$ tel que $g_1(C_1) = C_1$. Ainsi, si de plus, il existe une classe non autoduale C_2 de $D_{G,G'}$ qui est une composante connexe orientée de G (resp. qui est une composante connexe orientée de G disjointe de tout drapeau), alors d'après le Lemme 42 et l'hypothèse, C_2 est unique et elle satisfait la situation i)

(resp. ii)). Par ailleurs, comme $g_1(C_1) = C_1$, alors la composante connexe orientée X_1, du graphe G_{C_1}, contenant le sommet C_1 est fixe par g_1. Comme en plus C_2 est l'unique composante connexe orientée non autoduale du graphe G_{C_1} qui est distincte de X_1, qui satisfait la situation i) (resp. ii)), alors $g_1(C_2) = C_2$; ce qui contredit le fait que C_2 est non autoduale. Ainsi C_1 est l'unique classe non autoduale de $D_{G,G'}$.
Supposons dans un deuxième temps qu'on est dans les situations iii) et iv) et qu'il existe une classe non autoduale C_1 de $D_{G,G'}$ qui est différente de sa composante connexe orientée. Alors d'après les Propositions 13 et 34, $G(C_1)$ et $G'(C_1)$ sont (≤ 6)-hypomorphes et par suite, d'après Théorème 1, C_1 est infinie; ce qui contredit le Lemme 36.

Dans toute la suite, nous supposons donc qu'on est dans l'une des situations i), iii) et iv) (rep. dans la situation ii)) et que toute classe non autoduale de $D_{G,G'}$ est une composante connexe orientée de G (resp. composante connexe orientée de G disjointe de tout drapeau).
Supposons par l'absurde que $D_{G,G'}$ admet au moins deux classes non autoduales.
En utilisant pour les situation iii) et iv) la description da la classe non autoduale donnée dans le début de la présente preuve, le Lemme 42 pour la situation i), l'hypothèse et le Théorème 18 (resp. le Lemme 42 , l'hypothèse et le Théorème 18), on déduit facilement que dans chaque situation $l) \in \{i), iii), iv)\}$ (resp. dans la situation ii)) G admet exactement deux classes non autoduales, C_1 et C_2 et en plus, C_1 est la seule composante connexe orientée non autoduale de G (resp. composante connexe orientée non autoduale de G disjointe de tout drapeau) de type consécutivité infinie à une seule extrémité et C_2 est la seule composante connexe orientée non autoduale de G (resp. composante connexe orientée non autoduale de G disjointe de tout drapeau) qui satisfait la situation l) (resp. ii)) et, pour tout $k \in \{1, 2\}$, il existe un isomorphisme g_k de G_{C_k} sur $(G_{C_k})^*$ tel que $g_k(C_k) = C_k$. Comme en plus, pour chaque $l \in \{i), iii), iv)\}$ (resp. dans la situation ii)) C_2 est l'unique composante connexe orientée non autoduale (resp. composante connexe orientée non autoduale disjointe de tout drapeau), du graphe G_{C_1}, qui est distincte de C_1 et qui satisfait la situation l) (resp. ii)), alors $g_1(C_2) = C_2$; ce qui contredit le fait que C_2 est non autoduale.

Fait 45 *Dans chacune des situations i), ii), iii) et iv), les graphes G et G' sont hémimorphes.*
En effet,

D'après le Fait 44, dans chacune des situations i), ii), iii) et iv), $D_{G,G'}$ admet une unique classe non autoduale C_0. En plus, d'après l'hypothèse *et le Théorème 18 il existe un isomorphisme g de G_{C_0} sur $(G_{C_0})^*$ tel que $g(C_0) = C_0$. Par ailleurs, comme pour toute classe C de $D_{G,G'}$, distincte de C_0, $G'(C) \simeq G(C)$, alors il existe un isomorphisme f de G'_{C_0} sur G_{C_0} tel que $f(C_0) = C_0$. Il en découle l'existence d'un isomorphisme h de G'_{C_0} sur $(G_{C_0})^*$ tel que $h(C_0) = C_0$. Comme en plus, $G'(C_0) \simeq G^*(C_0)$, alors $G' \simeq G^*$.*

□

Preuve du Théorème 40.

La condition suffisante découle directement de la Proposition 26. Pour la condition nécessaire, soient G un graphe (≤ 11)-demi-reconstructible et non (≤ 10)-demi-reconstructible et G' un graphe (≤ 10)-hémimorphe à G qui ne lui est pas hémimorphe. D'après le Lemme 38, $\mathcal{C}_{n.a}(G) \leq 6$. Considérons alors un sous-graphe non autodual fini $G(I_0)$ tel que $\mid I_0 \mid = \mathcal{C}_{n.a}(G)$. Quitte à échanger G et G^* on peut supposer que $G(I_0) \simeq G'(I_0)$. D'après les Propositions 13 et 34, $D_{G,G'}$ admet au moins deux classes.

- Si $\mathcal{C}_{n.a}(G) \in \{3, 4\}$. D'après les Propositions 13 et 34, toute classe C de $D_{G,G'}$ est un module de G et G' tel que $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 6)-hypomorphes. Comme G' n'est pas hémimorphe à G, alors G est un graphe infini. Ainsi, d'après le Lemme 20, G vérifie la condition $\mathcal{C}_{infini}$; ce qui contredit le fait que G est un graphe (≤ 12)-demi-reconstructible.

- Si $\mathcal{C}_{n.a}(G) = 5$. On conclut par le Lemme 43.

- Si $\mathcal{C}_{n.a}(G) = 6$. Comme G est (≤ 11)-demi-reconstructible, alors d'après le Théorème 32, le graphe G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale qui est une préchaîne tournoi. D'après le Lemme 39, les graphes G et G' sont hémimorphes; ce qui est absurde.

7 Caractérisation des graphes (≤ 9)-demi-reconstructibles.

Comme tout graphe non (≤ 10)-demi-reconstructible est non (≤ 9)-demi-reconstructible, nous caractérisons dans ce paragraphe les graphes qui sont (≤ 10)-demi-reconstructibles et non (≤ 9)-demi-reconstructibles.

Théorème 46

Un graphe (≤ 10)*-demi-reconstructible* G *est non* (≤ 9)*-demi-reconstructible si et seulement si l'une des situations suivantes est satisfaite.*

1. $C_{n.a}(G) = 4$ *et* G *admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales qui sont des préchaînes tournois.*

2. $C_{n.a}(G) = 4$, *parmi les composantes connexes orientées non autoduales de* G *une seule, notée* D_1, *est une préchaîne tournoi et il n'existe pas d' isomorphisme* g *de* G_{D_1} *sur* $(G_{D_1})^*$ *tel que* $g(D_1) = D_1$.

3. $C_{n.a}(G) = 5$ *et* G *admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales qui sont des préchaînes.*

La preuve de ce théorème utilise en outre le lemme suivant où G est un graphe (≤ 10)-demi-reconstructible.

Lemme 47 *Soient* $d \in \{7, 8, 9\}$ *et* G' *un graphe* ($\leq d$)*-hémimorphe à* G. *Si* $C_{n.a}(G) = 5$ *et* G *admet au plus une composante connexe orientée non autoduale qui est une préchaîne, alors* $G' \simeq G$ *ou* $G' \simeq G^*$.

Preuve. Comme $C_{n.a}(G) = 5$, alors G, G' et G^* sont deux à deux (≤ 4)-hypomorphes. En plus, toute composante connexe orientée X de G est un module de G et G' et d'après le Lemme 37, $G(X) \simeq G'(X)$ ou $G^*(X) \simeq G'(X)$. Si toutes les composantes connexes orientées de G sont autoduales, alors $G \simeq G' \simeq G^*$. Sinon, soit D une composante connexe orientée non autoduale de G. Comme G et G^* sont (≤ 4)-hypomorphes et D est une classe de l'équivalence D_{G,G^*}, alors d'après le Lemme 10, D est de type consécutivité infinie à une seule extrémité ou une préchaîne. Comme G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale qui est une préchaîne, alors en utilisant le Théorème 18 on peut voir, comme dans la preuve du Lemme 39, que D est la seule composante connexe orientée non autoduale de G. Ainsi, $G \simeq G'$ si $G(D) \simeq G'(D)$, et $G^* \simeq G'$ si $G^*(D) \simeq G'(D)$. □

Preuve du Théorème 46.

La condition suffisante découle directement de la Proposition 26. Pour la condition nécessaire, soient G un graphe (≤ 10)-demi-reconstructible et non (≤ 9)-demi-reconstructible et G' un graphe (≤ 9)-hémimorphe à G qui ne lui pas hémimorphe. D'après le Lemme 38, $C_{n.a}(G) \leq 6$. Considérons alors un sous-graphe non autodual fini $G(I_0)$ tel que $\mid I_0 \mid = C_{n.a}(G)$. Quitte à échanger G et G^* on peut supposer que $G(I_0) \simeq G'(I_0)$. D'après les Propositions 13 et 34, $D_{G,G'}$ admet au moins deux classes.

- Si $C_{n.a}(G) = 3$. D'après les Propositions 13 et 34, toute classe C de $D_{G,G'}$ est un module de G et G' tel que $G(C)$ et $G'(C)$ sont (≤ 6)-hypomorphes. Comme G' n'est pas hémimorphe à G, alors G est un graphe infini. Ainsi, d'après le Lemme 20, G vérifie la condition C_{infini}; ce qui contredit le fait que G est (≤ 12)-demi-reconstructible.
- Si $C_{n.a}(G) = 4$. On conclut par le Lemme 43.
- Si $C_{n.a}(G) = 5$. On conclut par le Lemme 47.
- Si $C_{n.a}(G) = 6$. Comme G est (≤ 11)-demi-reconstructible, alors G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale qui est une préchaîne tournoi. D'après Lemme 39, les grpahes G et G' sont hémimorphes; ce qui est absurde.

8 Caractérisation des graphes (≤ 8)-demi-reconstructibles.

Comme tout graphe non (≤ 9)-demi-reconstructible est non (≤ 8)-demi-reconstructible, nous caractérisons dans ce paragraphe les graphes qui sont (≤ 9)-demi-reconstructibles et non (≤ 8)-demi-reconstructibles.

Théorème 48

Un graphe (≤ 9)-demi-reconstructible G est non (≤ 8)-demi-reconstructible si et seulement si l'une des situations suivantes est satisfaite.

1. $C_{n.a}(G) = 3$ *et G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales qui sont des préchaînes tournois disjointes de tout drapeau.*

2. $C_{n.a}(G) = 3$, *parmi les composantes connexes orientées non autoduales de G une seule, notée D_1, est une préchaîne tournoi disjointe de tout drapeau et il n'existe pas d' isomorphisme g de G_{D_1} sur $(G_{D_1})^*$ tel que $g(D_1) = D_1$.*

3. $C_{n.a}(G) = 4$ *et G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales qui sont des préchaînes.*

4. $C_{n.a}(G) = 4$, *parmi les composantes connexes orientées non autoduales de G une seule, notée D_1, est une préchaîne et il n'existe pas d' isomorphisme g de G_{D_1} sur $(G_{D_1})^*$ tel que $g(D_1) = D_1$.*

Preuve du Théorème 48.

La condition suffisante découle directement de la Proposition 26. Pour la condition nécessaire, soient G un graphe (≤ 9)-demi-reconstructible et non (≤ 8)-demi-reconstructible et G' un graphe (≤ 8)-hémimorphe à G qui ne lui pas hémimorphe. D'après le Lemme 38, $\mathcal{C}_{n.a}(G) \leq 6$. Considérons alors un sous-graphe non autodual fini $G(I_0)$ tel que $\mid I_0 \mid = \mathcal{C}_{n.a}(G)$. Quitte à échanger G et G^* on peut supposer que $G(I_0) \simeq G'(I_0)$. D'après les Propositions 13 et 34, $D_{G,G'}$ admet au moins deux classes.

- Si $\mathcal{C}_{n.a}(G) \in \{3,4\}$. On conclut par le Lemme 43.
- Si $\mathcal{C}_{n.a}(G) = 5$. Comme G est (≤ 9)-demi-reconstructible, alors G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale qui est une préchaîne. D'après le Lemme 47, G et G' sont hémimorphes; ce qui est absurde.
- Si $\mathcal{C}_{n.a}(G) = 6$. Comme G est (≤ 11)-demi-reconstructible, alors G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale qui est une préchaîne tournoi. D'après le Lemme 39, G et G' sont hémimorphes; ce qui est absurde.

9 Caractérisation des graphes (≤ 7)-demi-reconstructibles.

Comme tout graphe non (≤ 8)-demi-reconstructible est non (≤ 7)-demi-reconstructible, nous caractérisons dans ce paragraphe les graphes qui sont (≤ 8)-demi-reconstructibles et non (≤ 7)-demi-reconstructibles.

Théorème 49

Un graphe (≤ 8)-demi-reconstructible G est non (≤ 7)-demi-reconstructible si et seulement si l'une des situations suivantes est satisfaite.

1. $\mathcal{C}_{n.a}(G) = 3$ *et G admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales dont chacune est un module de type préchaîne tournoi ou une préchaîne non tournoi disjointe de tout drapeau.*

2. $\mathcal{C}_{n.a}(G) = 3$, *parmi les composantes connexes orientées non autoduales de G une seule, notée D_1, est un module de type préchaîne tournoi ou une préchaîne non tournoi disjointe de tout drapeau et il n'existe pas d' isomorphisme g de G_{D_1} sur $(G_{D_1})^*$ tel que $g(D_1) = D_1$.*

3. $C_{n.a}(G) = 4$ *et* G *admet au moins deux composantes connexes orientées non autoduales.*

La preuve de ce théorème utilise en outre le résultat suivant où G est un graphe (≤ 8)-demi-reconstructible.

Lemme 50 *Soient* G' *un graphe* (≤ 7)*-hémimorphe à* G *et* $C_{n.a}(G) = 4$. *Si* G *admet au plus une composante connexe orientée non autoduale, alors* $G \simeq G'$ *ou* $G^* \simeq G'$.

Preuve. Comme $C_{n.a}(G) = 4$, alors G, G' et G^* sont deux à deux (≤ 3)-hypomorphes et par suite toute composante connexe orientée D de G est un module de G et G'. D'autre part, d'après le Lemme 37, $G(D) \simeq G'(D)$ ou $G^*(D) \simeq G'(D)$. Si toutes les composantes connexes orientées de G sont autoduales, alors $G \simeq G' \simeq G^*$. Supposons donc que G admet une unique composante connexe orientée D_1 non autoduale. Ainsi, $G \simeq G'$ si $G(D_1) \simeq G'(D_1)$, et $G^* \simeq G'$ si $G^*(D_1) \simeq G'(D_1)$.

□

Preuve du Théorème 49.

La condition suffisante découle directement de la Proposition 26. Pour la condition nécessaire, soient G un graphe (≤ 8)-demi-reconstructible et non (≤ 7)-demi-reconstructible et G' un graphe (≤ 7)-hémimorphe à G qui ne lui pas hémimorphe. D'après le Lemme 38, $C_{n.a}(G) \leq 6$. Considérons alors un sous-graphe non autodual fini $G(I_0)$ tel que $\mid I_0 \mid = C_{n.a}(G)$. Quitte à échanger G et G^* on peut supposer que $G(I_0) \simeq G'(I_0)$. D'après les Propositions 13 et 34, $D_{G,G'}$ admet au moins deux classes.

- Si $C_{n.a}(G) = 3$. On conclut par le Lemme 43.
- Si $C_{n.a}(G) = 4$. On conclut par le Lemme 50.
- Si $C_{n.a}(G) = 5$. Comme G est (≤ 9)-demi-reconstructible, alors G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale qui est une préchaîne. D'après le Lemme 47, G et G' sont hémimorphes; ce qui est absurde.
- Si $C_{n.a}(G) = 6$. Comme G est (≤ 11)-demi-reconstructible, alors G admet au plus une composante connexe orientée non autoduale qui est une préchaîne tournoi. D'après le Lemme 39, G et G' sont hémimorphes; ce qui est absurde.

Références

[1] Y. Boudabbous. La 5-reconstruction et L'indécomposabilité Des Relations Binaires, European J. Combin. (2002) 23, 507 - 522.

[2] Y. Boudabbous, B. Cherif. Clôture transitive et reconstruction, C. R. Acad. Sci., Série I 331 (2000) 5-10.

[3] Y. Boudabbous, C. Delhommé. Prechain and ($\leq k$)-self duality. Manuscript 2006.

[4] Y. Boudabbous, C. Delhommé. ($\leq k$)-recontructible binary relations, article soumis.

[5] Y. Boudabbous, G. Lopez. The minimal non-($\leq k$)-reconstructible relations. Discrete Math. 291 (2005), 19- 40.

[6] B. Courcelle, C. Delhommé. The modular decomposition of countable graphs. Definition and construction in monadic second-order logic. Theor. Comp. Sc. 394, n. 1-2, (2008) 1-38.

[7] J.Dammak. La dualité dans la demi-reconstruction des relations binaires finies, C.R.A.S, Série I 327 (1998), 861 - 864.

[8] J. Dammak. Caractérisation des relations binaires finies d-demi-reconstructibles, Proyecciones, Volume 22, N 1, (2003), 31 - 61.

[9] A. Ehrenfeucht, T. Harju, G. Rozenberg. Decomposition of infinite labeled 2-structures, Lec. Notes Comput. Sci. 812 (1994) 145-158.

[10] N. El Amri. La ($\leq k$)-demi-reconstructibilité des graphes pour $k \in \{11, 12\}$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 707 - 710.

[11] R. Fraïssé. Abritement entre relations et spécialement entre chaînes, Symposi. Math., Instituto Nazionale di Alta Matematica 5 (1970), 203-251.

[12] J. G. Hagendorf, G. Lopez. La demi-reconstructibilité des relations binaires d'au moins 13 éléments, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, (1993), 7 - 12.

[13] J. G. Hagendorf, G. Lopez. Un théorème de demi-reconstruction des relations binaires de cardinal supérieur à 12. Prépublications mathématiques d'Orsay 9268 (1993).

[14] G. Lopez. Deux résultats concernant la détermination d'une relation par les types d'isomorphie de ses restrictions, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 274, Série A, (1972), 1525 - 1528.

[15] G. Lopez. Sur la détermination d'une relation par les types d'isomorphie de ses restrictions, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 275, Série A, (1972), 951-953.

[16] G. Lopez. L'indéformabilité des relations et multirelations binaires, Z. Math. Logik Grundlag. Math., 24, (1978), 303 - 317.

[17] G. Lopez, C. Rauzy. Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and (n-1), I, Z. Math. Logik Grundlag. Math., 38, (1992), 27-37.